

НОМЕР ПРОЕКТА <b>12-01-00721</b>		УЧЕТНАЯ КАРТОЧКА
НАЗВАНИЕ ПРОЕКТА <b>Разработка адаптивных алгоритмов для численного моделирования поверхностных волн на мелкой воде с учетом сферичности и вращения Земли</b>		
ОБЛАСТЬ ЗНАНИЯ <b>01 - математика, механика и информатика</b>	КОД(Ы) КЛАССИФИКАТОРА <b>01-223 01-207</b>	
ВИД КОНКУРСА <b>а - Инициативные проекты</b>		
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО РУКОВОДИТЕЛЯ ПРОЕКТА <b>Хакимзянов Гаяз Салимович</b>		ТЕЛЕФОН РУКОВОДИТЕЛЯ ПРОЕКТА <b>(383)3308656</b>
ПОЛНОЕ НАЗВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ, ГДЕ РЕАЛИЗУЕТСЯ ПРОЕКТ <b>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук</b>		
ОБЪЕМ СРЕДСТВ, ФАКТИЧЕСКИ ПОЛУЧЕННЫХ ЗА 2012 г. <b>375000 руб.</b>	ОБЪЕМ ФИНАНСИРОВАНИЯ, ЗАПРАШИВАЕМЫЙ НА СЛЕДУЮЩИЙ ГОД <b>480000 руб.</b>	
ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ ПРОЕКТА (включая руководителя) <b>9</b>	ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ, ИМЕЮЩИХ УЧЕНУЮ СТЕПЕНЬ <b>5</b>	ЧИСЛО МОЛОДЫХ (до 35 лет включительно) УЧАСТНИКОВ <b>5</b>
<b>Соммер Анна Федоровна</b>		
<b>Кутергин Виктор Александрович</b>		
<b>Федотова Зинаида Ивановна</b>		
<b>Чубаров Леонид Борисович</b>		
<b>Шокина Нина Юрьевна</b>		
<b>Гусев Олег Игоревич</b>		
<b>Бейзель Софья Александровна</b>		
<b>Мартемьянычева Ярославна Евгеньевна</b>		
ПОДПИСЬ РУКОВОДИТЕЛЯ ПРОЕКТА		ДАТА ПОДАЧИ ОТЧЕТА <b>15.01.2013</b>

## ОТЧЕТ ЗА 2012 ГОД ПО ПРОЕКТУ РФФИ 12-01-00721-а

Статус отчета: подписан

Дата подписания: 15.01.2013

Подписал: Хакимзянов Гаяз Салимович

Отчет распечатан: 15.01.2013

### Форма 501. КРАТКИЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ

*1.1. Номер проекта*

12-01-00721

*1.2. Руководитель проекта*

Хакимзянов Гаяз Салимович

*1.3. Название проекта*

Разработка адаптивных алгоритмов для численного моделирования поверхностных волн на мелкой воде с учетом сферичности и вращения Земли

*1.4. Вид конкурса*

а - Инициативные проекты

*1.5. Год представления отчета*

2013

*1.6. Вид отчета*

этап 2012 года

*1.7. Аннотация*

При более слабых, чем в предыдущих публикациях, ограничениях на скорость трехмерного вихревого течения жидкости над подвижным дном выведена система полных нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды. Для полной НЛД- модели получен закон изменения полной энергии при движении жидкости со свободной границей над подвижным дном и закон изменения потенциального вихря.

Получены новые слабо дисперсионные уравнения для волн малой амплитуды, допускающие, в отличие от классических уравнений Буссинеска, в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии и возможность расщепления на равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления и гиперболическую систему уравнений относительно полной глубины и вектора скорости.

Выполнен сравнительный анализ результатов численного моделирования процесса генерации поверхностных волн подводным оползнем в ограниченном водоеме на основе модели мелкой воды, полной нелинейно-дисперсионной модели, двух новых моделей Буссинеска и модели потенциальных течений жидкости со свободной границей.

Разработан и программно реализован алгоритм для расчета зон затопления волной цунами, основанный на использовании метода адаптивных сеток и аппроксимации краевых условий на подвижной линии уреза с учетом локально-аналитических решений плановых уравнений мелкой воды.

*1.8. Полное название организации, где реализуется проект*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук

"Исполнители проекта согласны с опубликованием (в печатной и электронной формах) аннотаций научных отчетов и перечня публикаций по проекту в авторской редакции"

*Подпись руководителя проекта*

## **Форма 502. КРАТКИЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ**

### *2.1. Номер проекта*

12-01-00721

### *2.2. Руководитель проекта*

Khakimzyanov Gayaz Salimovich

### *2.3. Название проекта*

Development of adaptive algorithms for numerical simulation of surface waves on shallow water in view of sphericity and rotation of the Earth

### *2.4. Год представления отчета*

2013

### *2.5. Вид отчета*

этап 2012 года

### *2.6. Аннотация*

The system of full nonlinear dispersive shallow water equations has been derived under weaker than in previous publications limitations on the velocity of three-dimensional vortex flow of liquid over a moving bottom. For full NLD model the variation of the total energy of the motion of the fluid with a free surface over a moving bottom and the variation of the potential vorticity have been obtained.

New weak dispersion equations for small-amplitude waves have been obtained, which allow, in contrast to the classical Boussinesq equations, the law of conservation of the total energy and the possibility of splitting into a uniformly elliptic equation for the dispersion component of the pressure and the hyperbolic system of equations for the full depth and velocity.

A comparative analysis of the results of the numerical modeling of surface waves generation by the underwater landslide in a limited reservoir using the shallow water model, full non-linear dispersion model, two new Boussinesq models and model of potential fluid flows with a free surface has been performed.

The algorithm has been developed and implemented to calculate tsunami inundation, based on the method of adaptive meshes and approximating the boundary conditions on the moving coastline with the local analytic solutions of 2D shallow water equations.

### *2.7. Полное название организации, где реализуется проект*

Institute of Computational Technologies SB RAS

*Подпись руководителя проекта*

## Форма 503. РАЗВЕРНУТЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ

### 3.1. *Номер проекта*

12-01-00721

### 3.2. *Название проекта*

Разработка адаптивных алгоритмов для численного моделирования поверхностных волн на мелкой воде с учетом сферичности и вращения Земли

### 3.3. *Коды классификатора, соответствующие содержанию фактически проделанной работы (в порядке значимости)*

01-223 01-207

### 3.4. *Объявленные ранее цели проекта на 2012 год*

Разработка конечно-разностных алгоритмов для моделирования распространения длинных поверхностных волн в рамках приближенной нелинейно-дисперсионной модели Буссинеска на сфере.

Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному («одномерному») склону, в рамках одномерной модели мелкой воды первого приближения, одномерной НЛД-модели и модели потенциальных плоскопараллельных течений жидкости со свободной границей.

Разработка разностных краевых условий на криволинейной подвижной линии уреза на основе точных аналитических решений плановых уравнений мелкой воды первого приближения.

### 3.5. *Степень выполнения поставленных в проекте задач*

В полном объеме выполнены работы по разработке конечно-разностных алгоритмов для моделирования распространения длинных поверхностных волн в рамках приближенной нелинейно-дисперсионной модели Буссинеска на сфере и предусмотренные планом работы по численному моделированию поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному («одномерному») склону, в рамках одномерной модели мелкой воды первого приближения, одномерной НЛД-модели и модели потенциальных плоскопараллельных течений жидкости со свободной границей. Дополнительно к плану этих направлений получены новые плановые нелинейно-дисперсионные уравнения Буссинеска, допускающие закон сохранения энергии, и разработаны эффективные численные алгоритмы для решения задач в рамках этих моделей.

Разностные краевые условия на криволинейной подвижной линии уреза для плановых уравнений мелкой воды первого приближения также разработаны, однако созданные на их основе численные алгоритмы показали свою работоспособность пока только для акваторий с достаточно гладкой береговой линией.

### 3.6. *Полученные важнейшие результаты*

При более слабых, чем в предыдущих публикациях, ограничениях на скорость трехмерного вихревого течения жидкости над подвижным дном выведена система полных нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды. Для полной НЛД- модели получен закон изменения полной энергии при движении жидкости со свободной границей над подвижным дном и закон изменения потенциального вихря.

Получены новые слабо дисперсионные уравнения для волн малой амплитуды, допускающие, в отличие от классических уравнений Буссинеска, в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии и возможность расщепления на равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления и гиперболическую систему уравнений относительно полной глубины и вектора скорости.

Выполнен сравнительный анализ результатов численного моделирования процесса

генерации поверхностных волн подводным оползнем в ограниченном водоеме на основе модели мелкой воды, полной нелинейно-дисперсионной модели, двух новых моделей Буссинеска и модели потенциальных течений жидкости со свободной границей.

Разработан и программно реализован алгоритм для расчета зон затопления волной цунами, основанный на использовании метода адаптивных сеток и аппроксимации краевых условий на подвижной линии уреза на основе локально-аналитических решений плановых уравнений мелкой воды.

### 3.7. *Степень новизны полученных результатов*

Все перечисленные выше важнейшие результаты являются новыми и получены впервые.

Впервые для полной нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды получен закон изменения полной энергии при движении жидкости со свободной границей над подвижным дном, а также и закон изменения потенциального вихря.

Впервые получены слабо дисперсионные уравнения для волн малой амплитуды, допускающие, в отличие от классических уравнений Буссинеска, в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии и возможность расщепления на равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления и гиперболическую систему уравнений относительно полной глубины и вектора скорости. Основная новизна двух полученных нами слабо дисперсионных моделей типа Буссинеска это наличие адекватных физике законов изменения энергии и дивергентная форма записи всех уравнений. Можно сказать, что эти упрощенные модели сохраняют очень важные физические свойства полных НЛД-моделей, которые, в свою очередь, наследуют эти свойства у трехмерных моделей гидродинамики. Это обстоятельство выгодно отличает полученные в настоящем проекте модели от других хорошо известных моделей типа Буссинеска.

Впервые детально, с использованием иерархии математических моделей и нового уравнения движения оползня по криволинейному откосу исследованы волновые режимы, возникающие в ограниченном водоеме при сходе оползня с крутого берегового склона. Детально исследовано влияние параметров, определяющих геометрию модельного водоема и движение оползня, на величины максимальных заплесков на берег водоема и плотину водохранилища.

### 3.8. *Сопоставление полученных результатов с мировым уровнем*

Все полученные результаты соответствуют мировому уровню исследований в данной области, а в направлении создания нелинейно-дисперсионных уравнений, допускающих закон сохранения энергии, и разработки эффективных численных алгоритмов в рамках этих моделей опережают мировой уровень.

### 3.9. *Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта*

В настоящее время для численного моделирования процесса распространения в океанах и морях длинных поверхностных волн используется, как правило, модель мелкой воды, полученная в предположении, что толщина слоя воды мала, вертикальная компонента вектора скорости частиц воды равна нулю, а горизонтальные компоненты не зависят от вертикальной координаты. После сильнейших цунами, происшедших в последние годы в Индийском и Тихом океанах, появился ряд работ, в которых было показано, что моделирование в рамках классической (бездисперсионной) модели мелкой воды уже не достаточно. Новые натурные данные свидетельствуют о том, что для моделирования распространения волн цунами в ряде случаев требуются более сложные математические модели, способные отражать вертикальную структуру течения, а также учитывать дисперсию волн и эффекты, обусловленные сферичностью и вращением Земли.

В последние годы уже начали появляться публикации, посвященные описанию

численных алгоритмов, основанных на слабо нелинейных, слабо дисперсионных моделях Буссинеска на сфере, которые выводились при весьма жестких ограничениях на определяющие параметры, в частности при условии малости амплитуды волн. Полная НЛД-модель (без предположения о малости амплитуды волн) на вращающейся притягивающей сфере была получена участниками проекта в 2011 году (Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения полной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 22-35) с использованием подхода, основанного на предварительном масштабировании уравнений Эйлера на сфере и введении малых параметров, позволяющих оценить вклад нелинейности, дисперсии, подвижности дна и эффектов, связанных со сферичностью Земли и ее вращением. Уравнения этой модели имеют следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (Hc) = 0,$$

$$v_t + (c \cdot \nabla)v + g \nabla \eta = \frac{1}{H} \nabla \left( \frac{H^3}{3} Q_1 + \frac{H^2}{2} Q_2 \right) - \nabla h \left( \frac{H}{2} Q_1 + Q_2 \right) + q, \quad (1)$$

где  $H = \eta + h$ ,  $c = c(\lambda, \theta, t) = (c^1, c^2)^T$  – средняя скорость,  $v = (v_1, v_2)^T$ ,  $v_1 = g_{10} + g_{11}c^1$ ,  $v_2 = g_{22}c^2$ ;  $g_{10} = \Omega R^2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{11} = R^2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{22} = R^2$ ;  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $q = (q_1, q_2)^T$ ,  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 1/2(\Omega + c^1)^2 \partial g_{11} / \partial \theta$ ;  $Q_1 = D(\nabla \cdot c) - (\nabla \cdot c)^2$ ,  $Q_2 = D^2 h$ ,  $D = \partial / \partial t + c \cdot \nabla$ ,  $\nabla = (\partial / \partial \lambda, \partial / \partial \theta)$ , дно  $r = R - h(\lambda, \theta, t)$  может быть подвижным,  $R$  – средний радиус Земли,  $\theta = \pi/2 - \varphi$ ,  $\lambda$  – долгота,  $\varphi$  – широта,  $g$  – ускорение силы тяжести.

В 2011 году (Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения Буссинеска на вращающейся сфере // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16, № 6. С. 74-84) из этой полной НЛД-модели получен целый класс новых приближенных НЛД-моделей на сфере, полезных с практической точки зрения: сферические аналоги плановых моделей Перегринна, Дорфмана-Яговдика и Буссинеска. Уравнения последней модели получены исполнителями проекта в следующем, удобном для построения численного алгоритма виде:

$$\begin{cases} (HR \sin \theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv \sin \theta)_\theta = 0, \\ U_t = -uu_\lambda - vu_\theta \sin \theta - g\eta_\lambda - (2\Omega R \sin \theta + u)v \cos \theta + q_1, \\ V_t = -uv_\lambda - vv_\theta \sin \theta - g\eta_\theta \sin \theta + (2\Omega R \sin \theta + u)u \cos \theta + q_2 \sin \theta, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$U = uR \sin \theta - \frac{h^2}{3} \nabla^2 (uR \sin \theta), \quad V = vR \sin \theta - \frac{h^2}{3} R \sin \theta \nabla^2 v, \quad (3)$$

$u$  и  $v$  – усредненные по глубине линейные компоненты вектора скорости по направлениям  $\lambda$  и  $\theta$  соответственно,

$$q_1 = -g \frac{h}{2} h_\lambda \nabla^2 \eta - g \frac{h}{2} \left( \frac{\eta_\lambda h_\lambda}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{\eta_\theta h_\theta}{R^2} \right)_\lambda + \frac{h}{2} h_{\lambda\lambda},$$

$$q_2 = -g \frac{h}{2} h_\theta \nabla^2 \eta - g \frac{h}{2} \left( \frac{\eta_\lambda h_\lambda}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{\eta_\theta h_\theta}{R^2} \right)_\theta - g \frac{h^2}{3R^2 \sin^2 \theta} (2\eta_{\lambda\lambda} \operatorname{ctg} \theta + \eta_\theta) + \frac{h}{2} h_{\theta\theta}.$$

В рамках НЛД-модели Буссинеска на сфере (2), (3) разработана разностная схема первого порядка аппроксимации на равномерных сетках для расчета распространения волн на сфере. В этой двухслойной схеме использовался известный для плановых задач подход, заключающийся в вычислении полной глубины  $H$  из

уравнения неразрывности по неявной схеме и вычислении из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2) двух вспомогательных величин  $U$  и  $V$ , которые брались затем в качестве левых частей для эллиптических уравнений (3) относительно компонент скорости  $u$  и  $v$ .

В 2012 г. разработана также новая схема второго порядка аппроксимации для модели Буссинеска на сфере. Новизна здесь в том, что аппроксимируемые уравнения Буссинеска записаны теперь в виде уравнений (1) полной НЛД-модели, из правых частей которых отброшены некоторые слагаемые, имеющие определенный порядок малости в безразмерных переменных. Полученные таким образом уравнения движения модели Буссинеска сохраняют структуру уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения, отличаясь от последних только правой частью, поэтому имеющаяся у нас схема второго порядка аппроксимации с оригинальными процедурами монотонизации для бездисперсионных уравнений мелкой воды удалось обобщить и для уравнений Буссинеска, при этом на каждом шаге по времени дополнительно решается задача для эллиптического уравнения, но не относительно компонент скорости, как это делается в известных подходах, а относительно осредненного по глубине негидростатического давления модели Буссинеска. С помощью разработанного алгоритма выполнены расчеты распространения поверхностных волн в экваториальной области, ограниченной с севера и юга непроницаемыми границами, проходящими по заданным широтам.

Оказалось, что полученные для сферы приближенные НЛД-модели Буссинеска обладают, к сожалению, существенным недостатком: они не допускают в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии. Здесь имеется в виду следующее. Если в законе сохранения энергии трехмерной модели использовать разложение компонент скорости по малому параметру, отвечающему за дисперсию, и применить те же упрощающие предположения, при которых были получены уравнения неразрывности и движения какой-либо НЛД-модели, то мы должны получить закон сохранения энергии для этой НЛД-модели. С другой стороны, закон сохранения энергии может быть получен и путем эквивалентных преобразований самих НЛД-уравнений, без привлечения трехмерной модели. Эти два закона должны совпасть, но они, как правило, не совпадают. В последнем случае мы и говорим, что приближенная модель не допускает в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии. Чтобы понять причины такого рассогласования мы обратились к более простому случаю – приближенным НЛД-моделям на плоскости (т.е. моделям, в которых сферичность не учитывается), поскольку такие модели давно используются в расчетах и в некоторой степени изучены.

Известно, что модель мелкой воды первого приближения, а также нелинейно-дисперсионная модель Грина–Нагди допускают в качестве своего следствия закон сохранения энергии в случае стационарного дна или закон изменения энергии в случае подвижного дна, являющиеся аналогами законов сохранения или изменения энергии в исходной трехмерной модели течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей. Законы сохранения и изменения энергии играют фундаментальную роль в обосновании теории уравнений мелкой воды. Кроме того, они имеют самостоятельное значение в связи с необходимостью контроля точности численных алгоритмов. Однако, известные промежуточные НЛД-модели, находящиеся в иерархии гидродинамических моделей между бездисперсионной моделью мелкой воды на подвижном дне и полной НЛД-моделью Грина–Нагди на подвижном дне, уже не обладают законом изменения энергии. Оказалось, что это является следствием необоснованного отбрасывания некоторых членов уравнений полной НЛД-модели при переходе к упрощенным НЛД-моделям с применением известного в теории длинных волн условия Буссинеска. К примеру, для модели Перегринана аналог закона сохранения энергии не выполняется даже в случае ровного горизонтального дна и такую модель следует считать

неудовлетворительной. Отсутствие закона сохранения (или изменения) энергии в таких приближенных НЛД-моделях приводит к необходимости использования при проведении расчетов специальных приемов корректировки рассчитываемых величин (сглаживание, «подливание воды» и т.п.), дающих в конечном итоге приемлемое эволюционное поведение полной энергии и удовлетворительные результаты расчетов.

В отчетный период получены две приближенные НЛД-модели (слабо дисперсионная, т.е. для малых амплитуд, и слабо дисперсионная при дополнительном предположении о слабой деформации дна), обладающие законом изменения энергии. Для этих моделей разработаны численные алгоритмы с расщеплением на эллиптическую и гиперболическую части и с их помощью выполнено исследование воздействия на берег поверхностных волн, вызванных сходом подводного оползня. По результатам исследований готовится публикация. Прделанная работа открывает путь к получению «правильных» НЛД-моделей на сфере, моделей, снабженных уравнением энергии. Такие модели и численные алгоритмы для них планируется разработать на следующем этапе выполнения проекта.

Важность учета оползневого механизма генерации поверхностных волн при исследовании катастрофических явлений в прибрежных морских акваториях не вызывает сомнений. Подводные оползни возможны не только в прибрежной зоне морей, но также и в глубоких ограниченных водохранилищах с крутыми береговыми склонами. Такие оползни могут быть вызваны землетрясениями или даже происходящими вблизи водоемов промышленными взрывами и приводят к образованию цунамиподобных поверхностных волн, опасных для береговых сооружений. В последние годы были предприняты попытки экспериментального изучения поверхностных волн, возникающих при движении твердой модели оползня по плоскому подводному склону. Ряд работ посвящен численному моделированию такой задачи с использованием закона движения твердого оползня по плоскому откосу. Моделирование реальных ситуаций требует учета неровности подводного склона, деформации формы оползня при его движении и многих других факторов, поэтому система прогнозирования взаимодействия оползневых волн с берегом и сооружениями пока далека от совершенства.

В отчетный период получены новые уравнения движения подводного оползня пространственно неоднородной формы по пространственно неоднородному подводному склону (*Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558*). При этом оползень представляется «квазидеформируемым» объемом сплошной среды, форма поверхности которого меняется в соответствии с встречающимися по ходу движения неровностями склона (как у деформируемого тела), а горизонтальные компоненты вектора скорости одинаковы в каждой точке оползня (как у твердого тела, движущегося поступательно). В полученной модели оползня его масса не меняется, а движение происходит под действием сил тяжести, плавучести, сопротивления воды и трения о дно.

На рис. 1 изображена модельная акватория водохранилища с пространственно неоднородным дном. Пространственная неоднородность формы дна модельной акватории обусловлена тем, что в ее средней части имеется модельное русло реки в месте ее впадения в водохранилище – подводный «желоб», на склонах которого могут накапливаться осадочные массы грунта. На рис. 1 также показаны траектории движения оползня пространственно неоднородной формы для его двух различных начальных положений на подводных склонах желоба. Видно, что оползень, смещаясь с края желоба в сторону увеличения глубин, по инерции поднимается на локальное возвышение дна, расположенное напротив желоба, и далее сползает с этого

возвышения вниз, причем в разных для вариантов 1 и 2 направлениях. При варьировании параметров, определяющих характеристики оползневой материала и дна могут получаться другие интересные траектории движения оползня, особенно при малом трении о дно. Таким образом, выбранная модельная акватория позволяет рассматривать сложные криволинейные движения оползней, поэтому эти модельная акватория и модельный оползень использовались в отчетном году для тестирования разработанных численных алгоритмов расчета генерации поверхностных волн движением подводного оползня.

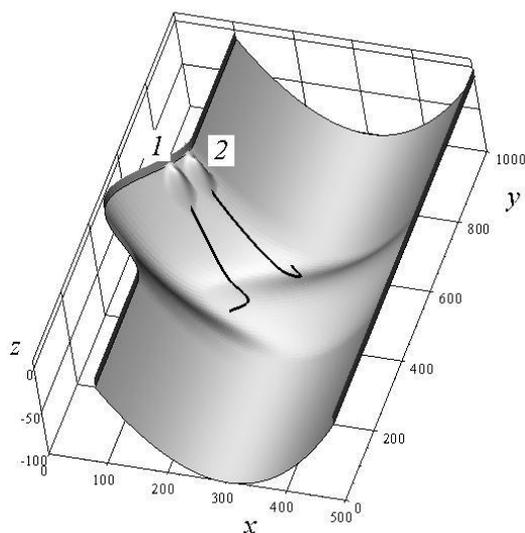


Рис.1. Модельная акватория водохранилища и траектории движения оползня для двух различных стартовых положений

В 2012 г. разработаны алгоритмы расчета генерируемых оползнем поверхностных волн на основе следующей иерархии гидроволновых моделей: модели потенциальных течений, полной нелинейно-дисперсионной модели, слабо-дисперсионной модели, слабо-дисперсионной модели в условиях слабой деформации дна и, наконец, нелинейной модели мелкой воды первого приближения.

В рамках последней модели численное моделирование выполнялось с использованием схемы МакКормака на равномерной сетке. Общее представление о порождаемом движении оползня волновом процессе может быть получено с помощью картины свечения – пространственного распределения максимальных значений амплитуд за все время расчета (рис. 2, а). Эта картина показывает, что основная часть волновой энергии направлена в сторону первоначального сдвига оползня и, соответственно, в этом направлении наблюдаются максимальные заплески на береговой линии. На рисунках 2, б–г демонстрируется развитие процесса генерации поверхностных волн. Видно, что в момент начала движения оползня генерируется кольцевая положительная волна, опережающая оползень, движущийся с докритической скоростью. Над самим оползнем во все время его движения наблюдается сопровождающая его отрицательная волна, а также два положительных «всплеска» над передним и задним его фронтами. В отличие от упоминавшейся головной положительной волны, которая за исключением момента своей генерации далее от оползня и характеристик его движения не зависит, амплитуды этих «сопровождающих» волн во все время своего распространения полностью определяются скоростью движения оползня и глубиной его текущего положения. Чем меньше становится скорость и чем больше глубина, тем меньше оказывается высота этих волн, и наоборот. По мере распространения волн происходит процесс их взаимодействия с неровностями дна и береговыми линиями.

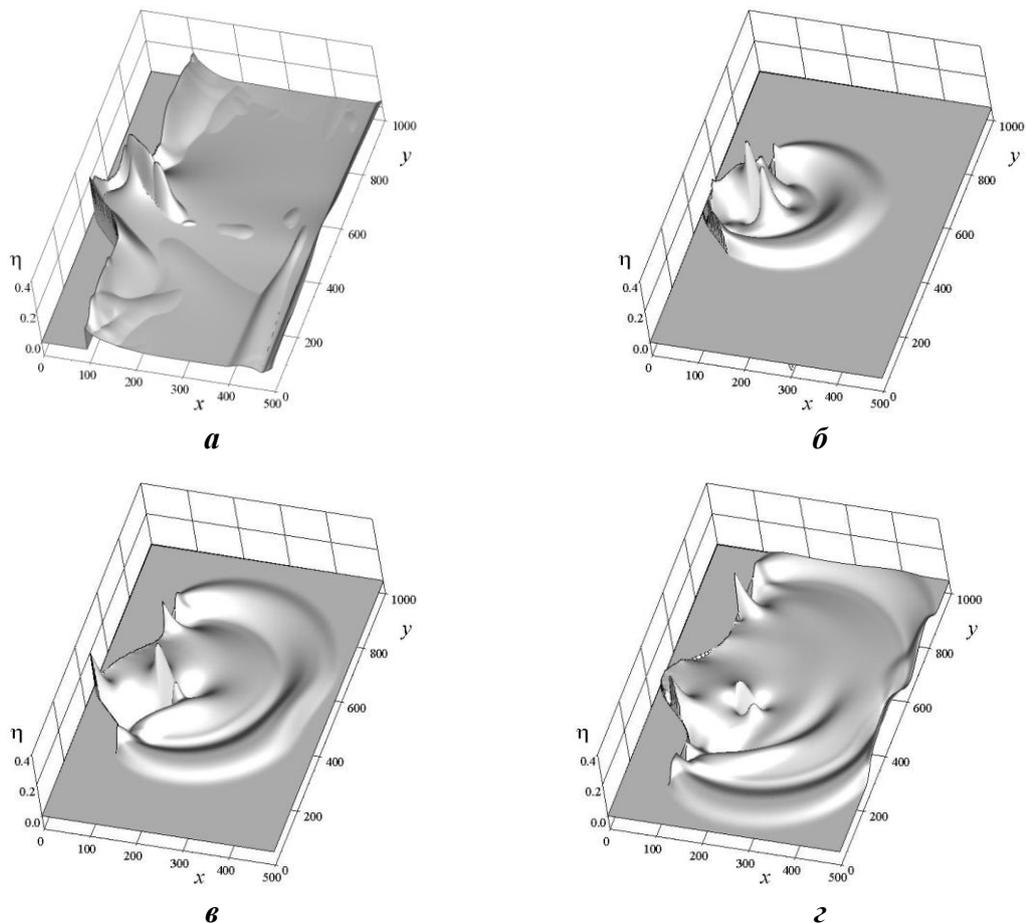


Рис.2. График максимальных значений амплитуд за все время расчета (а) и графики свободной поверхности  $z = \eta(x, y, t)$  в моменты времени  $t = 9.9$  с (б),  $14.8$  с (в),  $19.8$  с (г)

В классе нелинейно-дисперсионных моделей получены три НЛД-модели, обладающие законом сохранения энергии, и для всех трех моделей разработаны новые численные алгоритмы с расщеплением на эллиптическую и гиперболическую части. В отчетный период при более слабых, чем в предыдущих публикациях, ограничениях на скорость трехмерного вихревого течения жидкости над подвижным дном выведена (Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. *Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94-108*) система полных нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды, уравнение движения которой удалось записать в компактном виде, аналогичном записи закона изменения импульса в газовой динамике:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{H} \nabla (HP) = q \nabla h, \quad (4)$$

где  $\mathbf{u} = (u, v)$  – усредненная по глубине горизонтальная составляющая вектора скорости трехмерного течения,  $H = \eta + h$  – полная глубина,  $P$  – среднее по толщине слоя давление,  $q$  – давление на дне, отнесенное к  $H$ ,  $z = \eta(x, y, t)$  – уравнение свободной границы,  $z = -h(x, y, t)$  – уравнение подвижного дна.

В отличие от классических уравнений мелкой воды в уравнения движения (4) входят смешанные производные по времени и пространственным переменным от компонент вектора скорости, что осложняет построение численного алгоритма. Используя известный в теории дифференциальных уравнений прием понижения порядка производных путем добавления к исходным неизвестным новых зависимых переменных, избавимся от этих смешанных производных высокого порядка, введя

дополнительную зависимую переменную – дисперсионную составляющую  $\varphi$  давления, проинтегрированного по толщине слоя, и добавив к исходным уравнениям НЛД-модели уравнение относительно новой зависимой переменной  $\varphi$ :

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \varphi}{H} - \frac{(\nabla \varphi \cdot \nabla h) \nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{H^3} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h}{H^2 r} \right) \right) = F, \quad (5)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left( g \nabla \eta + \frac{R \nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{Hr} + 2(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - 2(\nabla u \times \nabla v),$$

$$R = -g \nabla \eta \cdot \nabla h + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla h), \quad B = h_{tt} + 2(\mathbf{u} \cdot \nabla h_t), \quad r = 4 + |\nabla h|^2.$$

Итак, расширенная система НЛД-уравнений состоит из уравнения неразрывности

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \quad (6)$$

уравнения движения

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla H = g \nabla h + \frac{\nabla \varphi - \psi \nabla h}{H}$$

(7)

и уравнения (5) относительно дисперсионной составляющей  $\varphi$  проинтегрированного по глубине давления, при этом функция  $\psi$  вычисляется по формуле

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{H} + HR + \nabla \varphi \cdot \nabla h \right). \quad (8)$$

Алгоритм расчета на произвольном шаге по времени с номером  $n$  состоит из двух шагов. На шаге предиктор сначала решается конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее (5), и определяется функция  $\varphi$ . Коэффициенты уравнения вычисляются по известным значениям  $H^n$  и  $\mathbf{u}^n$  с  $n$ -го слоя по времени. Затем решается гиперболическая система уравнений (6), (7), при этом в правой части уравнения движения используются уже известные значения  $\varphi^n$ ,  $\psi^n$ ,  $H^n$  и  $h^n$ . После этого вновь численно решается уравнение (5) с использованием величин  $H^*$  и  $\mathbf{u}^*$ , вычисленных на предикторе. Найденные на этом этапе значения  $\varphi^*$  и  $\psi^*$  используются на шаге корректор для определения окончательных значений  $H^{n+1}$  и  $\mathbf{u}^{n+1}$  путем численного решения системы уравнений гиперболического типа, состоящей из уравнения неразрывности (6) и уравнения движения (7), записанного с дивергентной формой левой части:

$$(\mathbf{H}\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}\mathbf{u}) + g \nabla \frac{H^2}{2} = gH \nabla h + \nabla \varphi - \psi \nabla h. \quad (9)$$

Достоинством модифицированной НЛД-модели является то, что система уравнений (5)–(7) допускает при численном решении расщепление на эллиптическую и гиперболическую части, что позволяет использовать для каждой из частей известные и хорошо изученные алгоритмы. Уравнение (5) является равномерно эллиптическим, и если коэффициент при  $\varphi$  положителен, то для нахождения численного решения этого уравнения можно построить разностные схемы с положительно определенными операторами и использовать быстро сходящиеся итерационные методы решения уравнений эллиптического типа с переменными коэффициентами. Левые части уравнений движения (7), (9) совпадают с левыми частями системы уравнений мелкой воды первого гидродинамического приближения, поэтому для численного решения гиперболической части (6), (7), (9) можно использовать, например, схему предиктор-корректор, хорошо зарекомендовавшую себя при исследовании волновых процессов в рамках модели мелкой воды.

Для нелинейно-дисперсионной модели (4), (6) получен закон изменения полной энергии при движении жидкости со свободной границей над подвижным дном и закон изменения потенциального вихря.

При выводе НЛД-уравнений (4), (6) предположение о малости амплитуды волн не использовалось. В отчетный период участниками проекта получены слабо дисперсионные НЛД-уравнения для волн малой амплитуды, допускающие, в отличие от классических уравнений Буссинеска, в качестве своего следствия уравнение энергии. При этом структура уравнений полной НЛД-модели сохраняется и в случае слабо дисперсионной модели, для которой мы имеем систему уравнений гиперболического типа (6), (9),

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h \right)$$

и равномерно эллиптическое уравнение

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h)\nabla h}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h}{Hhr} \right) \right) = F, \quad (10)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left( g\nabla\eta + \frac{R\nabla h}{r} \right) - \frac{6R}{hr} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h}{h} - 2(\nabla u \times \nabla v).$$

Поэтому описанный выше алгоритм численного решения полных НЛД-уравнений используется и для решения задач в рамках слабо дисперсионной модели. Доказано, что эта модель, как и полная НЛД-модель, допускает в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии.

Из рассмотренной выше слабо дисперсионной модели получены уравнения слабо дисперсионных течений над слабо деформируемым дном

$$h(x, y, t) = h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y, t),$$

где  $\varepsilon$  – мало. В этой модели уравнение неразрывности (6) остается прежним, уравнение движения принимает вид

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla H = g\nabla h + \frac{\nabla\varphi - \psi\nabla h_0}{H}, \quad (11)$$

а уравнение для функции  $\varphi$  модифицируется к следующему:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla\varphi}{H} - \frac{(\nabla\varphi \cdot \nabla h_0)\nabla h_0}{Hr} \right) - 6\varphi \left( \frac{2}{Hh_0^2} \frac{r-3}{r} + \nabla \cdot \left( \frac{\nabla h_0}{Hh_0 r} \right) \right) = F, \quad (12)$$

где

$$F = \nabla \cdot \left( g\nabla\eta + \frac{R\nabla h_0}{r} \right) - \frac{6R}{h_0 r} + (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{Dh_0}{h_0} - 2(\nabla u \times \nabla v),$$

$$\psi = \frac{1}{r} \left( \frac{6\varphi}{h_0} + HR + \nabla\varphi \cdot \nabla h_0 \right), \quad R = -g\nabla\eta \cdot \nabla h_0 + \mathbf{u} \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla h_0), \quad r = 4 + |\nabla h_0|^2.$$

Подчеркнем главную особенность двух полученных нами слабо дисперсионных моделей типа Буссинеска: это наличие адекватных физике законов изменения энергии и дивергентная форма записи всех уравнений. Можно сказать, что эти упрощенные модели сохраняют очень важные физические свойства полных НЛД-моделей, которые, в свою очередь, наследуют эти свойства у трехмерных моделей гидродинамики. Это обстоятельство выгодно отличает полученные в настоящей работе модели от других хорошо известных моделей типа Буссинеска (например, *Peregrine D.H. Long waves on a beach // J. Fluid. Mech. 1967. Vol. 27. Pt. 4. P. 815-827; Дорфман А.А., Яговдик Г.И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне*

*переменной глубины // Числен. методы мех. сплошной среды. 1977. Т. 8, № 1. С. 36-48; Dias F., Milewski P. On the fully-nonlinear shallow-water generalized Serre equations // Physics Letters A. 2010. Vol. 374(8). P. 1049-1053).*

Алгоритм расчета на основе модели потенциальных течений жидкости со свободной границей основан на применении в расчетах подвижных адаптивных сеток, однако требует больших вычислительных ресурсов, на порядки больших, чем нужно для нелинейно-дисперсионных моделей и в особенности для модели мелкой воды первого приближения. С другой стороны, последние модели могут давать вполне приемлемые результаты по таким прогнозам, как величины заплесков волн на берег, ограждающие дамбы и плотину ГЭС. Поэтому разработанные в отчетном году эффективные численные алгоритмы для моделей мелкой воды первого и второго приближения предполагается обобщить в следующем году на случай использования адаптивных сеток, чтобы выполнять многопараметрические расчеты в водохранилищах с реальной формой береговой линии.

Тестирование разработанных численных алгоритмов выполнялось на задаче о накате волн на берег водохранилища с параболической формой дна, не зависящей от горизонтальной координаты  $y$ . На рис. 3, *a-b* показана динамика поведения волн при использовании для расчета движения волн различных математических моделей. Видно, что при использовании модели потенциальных течений и НЛД-модели возникают системы диспергирующих волн. Модель мелкой воды, напротив, дает одиночную волну, которая отражаясь от противоположных берегов может многократно пересекать водоем. Несмотря на отличие волновых картин, воспроизводимых различными математическими моделями, максимальные значения заплесков на берег (см. рис. 3, *z*) сопоставимы в некоторых диапазонах изменения определяющих параметров.

Для того чтобы выяснить области применимости различных математических моделей, описывающих поведение поверхностных волн, сгенерированных оползнем, был проведен большой цикл вычислительных экспериментов по определению того, какие из параметров, отвечающих за движущийся объем (высота  $T$  и длина  $b$  оползня), движущуюся массу (относительная плотность  $\gamma$ , равная отношению плотности материала оползня к плотности воды, и коэффициент присоединенной массы  $C_w$ ), за торможение оползня (угол трения  $\theta_*$  и коэффициент гидродинамического сопротивления  $C_d$ ) наиболее существенно влияют на величину  $R$  максимального вертикального заплеска на берег водоема с неровным дном. В этих экспериментах варьировались значения какой-либо пары параметров, значения остальных четырех фиксировались и брались равными некоторым базовым значениям.

В качестве примера на рис. 4 изображены поверхности  $R = r(b, T)$ , которые характеризует влияние размеров оползня и, следовательно, его объема, на величину максимального заплеска на берег, и поверхности  $R = r(\gamma, C_w)$ , характеризующие зависимость максимального заплеска от коэффициентов  $C_w$  и  $\gamma$ . Видно, что использование модели мелкой воды первого приближения приводит к завышенной оценке величин максимальных заплесков на берега глубокого ограниченного водоема и для более точной оценки следует учитывать дисперсионные эффекты. Наблюдаемое при больших значениях определяющих параметров различие в результатах расчета максимальных заплесков на берег объясняется тем, что НЛД-модели и модель потенциальных течений генерируют, как было указано выше, не одну, а серию сравнительно коротких поверхностных волн (см. рис. 3), которые движутся к берегу с меньшей скоростью, чем сгенерированные одиночные волны в нелинейной модели мелкой воды и, как следствие, дают меньшие значения максимальных заплесков.

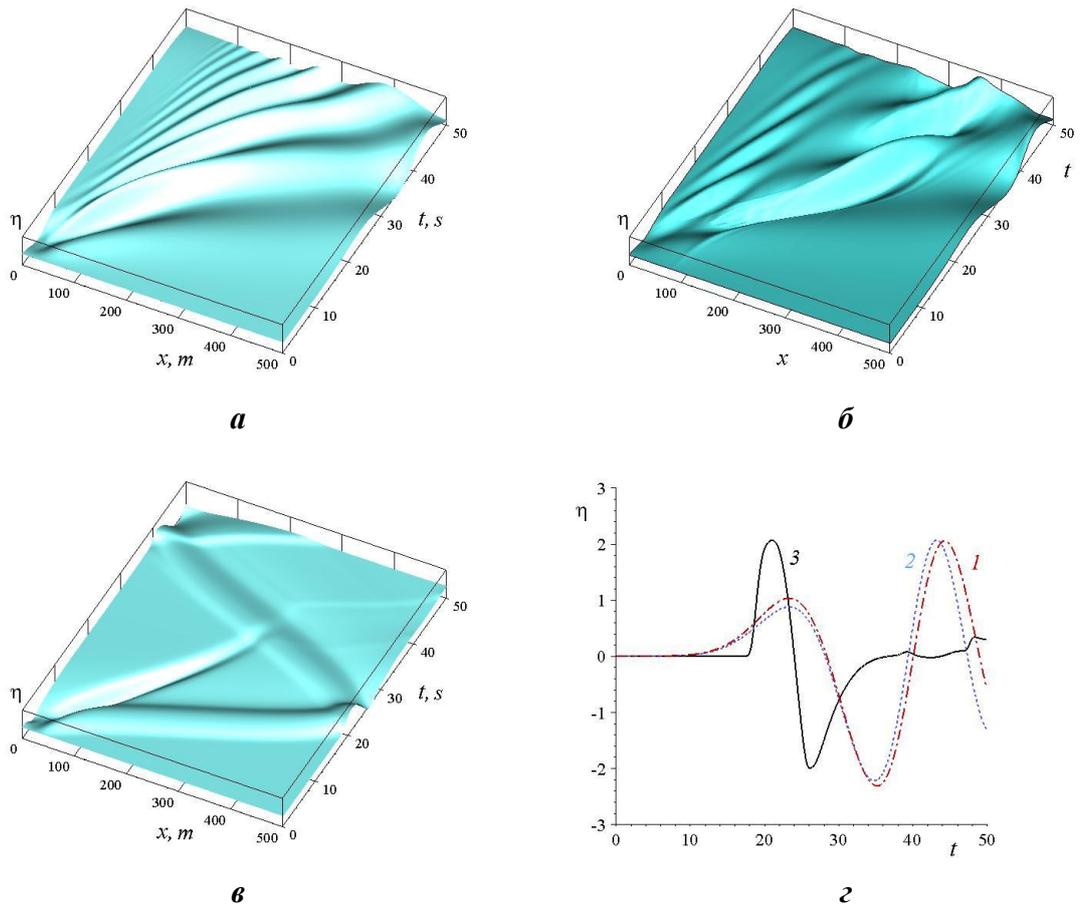


Рис.3. График поверхности  $z = \eta(x,t)$  при использовании модели потенциальных течений (а), полной НЛД-модели (б) и модели мелкой воды первого приближения (в); *г* – мареграммы на правом берегу водоема при использовании модели мелкой воды первого приближения (сплошная линия), полной НЛД-модели (штрих-пунктирная линия) и модели потенциальных течений (пунктирная линия)

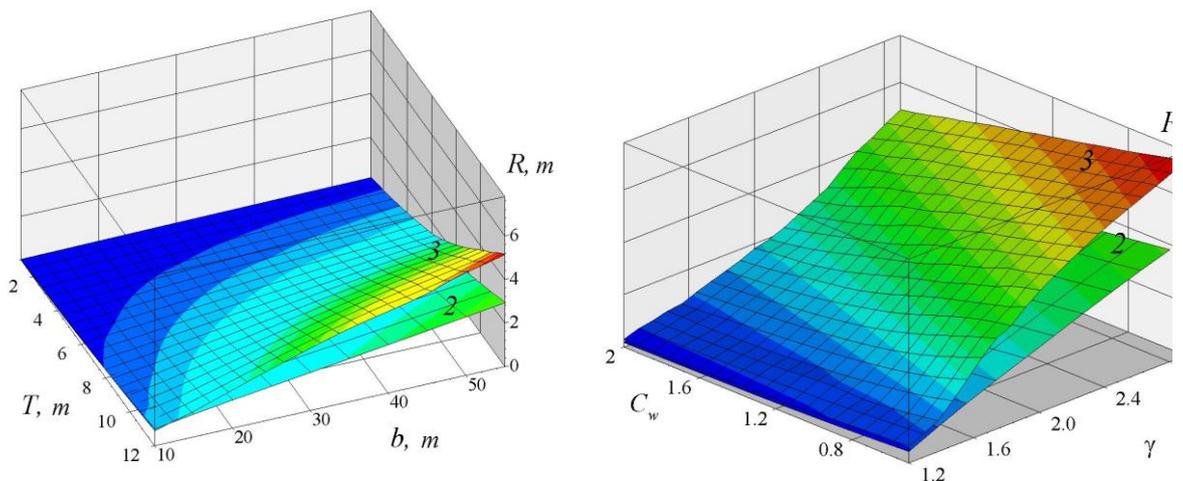


Рис. 4. Зависимость максимального заплеска  $R$  от длины  $b$  и высоты  $T$  подводного оползня (слева); от коэффициента присоединенной массы  $C_w$  и относительной плотности оползневой массы  $\gamma$  (справа). 2 – модель потенциальных течений; 3 – модель мелкой воды

Кроме моделирования воздействия волн, порожденных оползнем, на берега

водохранилища, выполнено также исследование величин заплесков на плотину ГЭС. Эта задача решалась в рамках одномерных моделей мелкой воды, трех указанных выше нелинейно-дисперсионных моделей, а также модели плоскопараллельных потенциальных течений жидкости. Дно модельного водоема имело параболическую форму в месте начального расположения оползня и являлось горизонтальным в окрестности плотины (рис. 5). Показано, что хотя классическая модель мелкой воды дает иную форму приходящей к плотине волны (см. правый рисунок 5), тем не менее вертикальные заплески, предсказываемые этой моделью, согласуются с результатами расчетов по более точным моделям.

На рис. 6 демонстрируется влияние неровности дна на движение оползня и генерируемые им поверхностные волны. В некоторых зарубежных публикациях утверждается, что при исследовании поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем, можно без заметного ущерба для точности расчетов заменять криволинейный склон плоским откосом. Проведенные нами вычислительные эксперименты показывают, что это не так. Криволинейность склона оказывает существенно влияние на движение оползня и, как следствие, на величины максимальных заплесков.

На рис. 7 демонстрируется сравнение результатов расчетов, полученных на основе разных НЛД-моделей. Графики на левом и среднем рисунке получены для случая движения оползня большой высоты ( $T = 10\text{м}$ ) по подводному склону водоема, изображенного на рис. 5. Угол трения  $\theta_*$  был равен  $5^\circ$ . Соответствующие этим данным траектория движения оползня и график его скорости изображены штриховыми линиями на рис. 6.

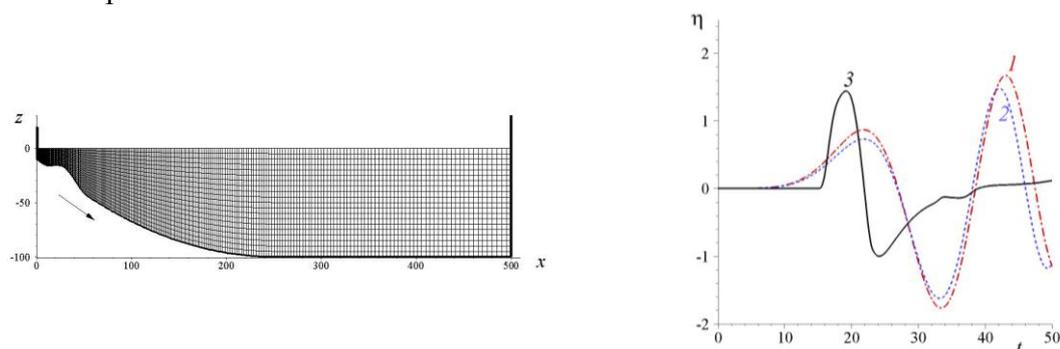


Рис. 5. Сетка в начальный момент времени для расчета в рамках модели потенциальных течений жидкости (слева) и мареограммы на плотине водохранилища при использовании модели мелкой воды первого приближения (сплошная линия), полной НЛД-модели (штрих-пунктирная линия) и модели потенциальных течений (пунктирная линия)

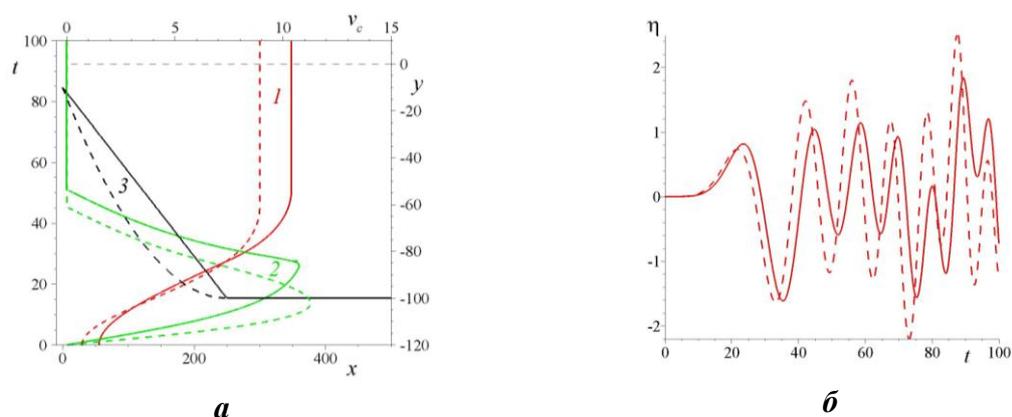


Рис. 6. Влияние неровности подводного склона на движение оползня и генерируемые им поверхностные волны. Слева: 1 – графики траекторий движения оползня; 2 – графики скорости движения оползня; 3 – профили дна. Справа: мареограммы возвышения на плотине. Сплошная линия – плоский склон; штриховая линия – склон параболической формы

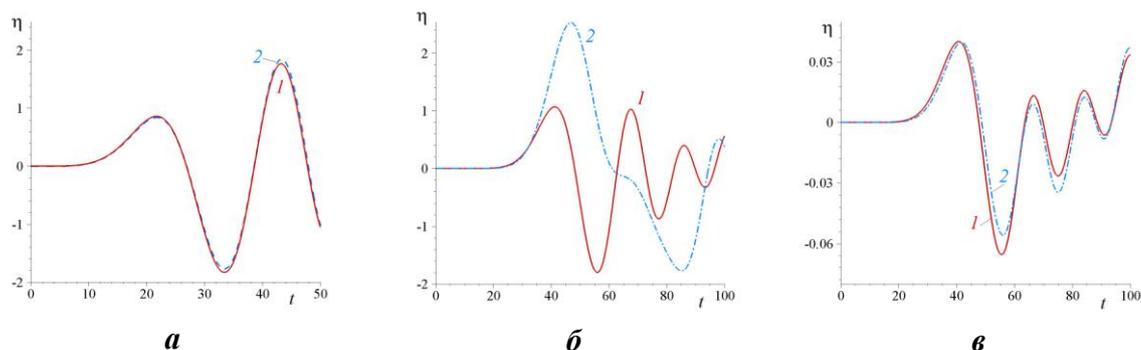


Рис. 7. Мареограммы, рассчитанные на основе полной НЛД-модели (сплошная линия (1)) и приближенных НЛД-моделей (штриховая линия (2)). Слева – слабо-дисперсионная модель, в центре и справа – слабо дисперсионная модель для слабо деформируемого дна в случае оползня большой высоты  $T=10\text{м}$  (в центре) и малой высоты  $T=1\text{м}$  (справа)

Из рис. 7 (а) видно, что слабо дисперсионная модель дает в рассматриваемой задаче практически неотличимые от полной НЛД-модели результаты. Поэтому использование здесь слабо дисперсионной модели может оказаться вполне оправданным, поскольку разработанный для нее численный алгоритм имеют большую устойчивость из-за понижения степени нелинейности в некоторых членах уравнения (10) по сравнению с уравнением (5) для полной НЛД-модели. Напротив, результаты, полученные на основе слабо дисперсионной модели для слабо деформируемого дна уже сильно отличаются от тех, что получены по полной НЛД-модели (см. рис. 7, б). Хорошее соответствие наблюдается только при условии действительно слабой деформации дна, что видно из рис. 7 (в), полученного при  $T=1\text{м}$ ,  $\theta_*=10^\circ$  и области вдвое длиннее той, что изображена на рис. 5.

Надежная оценка зон затопления при накате волн цунами на берег по-прежнему остается нерешенной проблемой математического моделирования. Для выдачи качественного прогноза на основе методов математического моделирования одного лишь качественного численного алгоритма недостаточно: необходимы еще и большие массивы разнородных, специальным образом обработанных и искусно приготовленных подробных данных о рельефе дна и суши в прибрежной зоне, параметрах источника волны, разнородные данные наблюдений и т.д.

В настоящее время наибольшее распространение для расчета зон затопления при выходе волны цунами на берег получили конечно-разностные методы сквозного счета, в которых нестационарная область течения с подвижной линией уреза вкладывается в большую область простой формы, например в прямоугольник, содержащий акваторию, линию уреза и прилегающую к берегу часть суши. В этой области с неподвижной границей решаются те же уравнения гидродинамики, что и в исходной области течения, при этом суша либо покрывается тонкой пленкой воды, удерживаемой силой трения, либо заменяется мелкой акваторией с горизонтальным дном, либо в точках суши скорость и полная глубина жидкости полагаются равными нулю. Для приближенного нахождения положения подвижной линии уреза проводится анализ вычисленных значений полной глубины воды на каждом шаге по времени и линия уреза определяется, например, как граница области, в узлах которой полная глубина равна нулю или не превосходит заранее заданной малой величины. В ряде работ линия уреза заменялась вертикальной стенкой, установленной на некоторой глубине, и по вертикальным заплескам на нее приближенно определялся горизонтальный проход волны на сушу. В последнее время выросло число работ, в которых используется методика разделения области распространения цунами на две части: вдали от берега

используется метод конечных элементов или метод конечных объемов на грубых сетках, а в ближней зоне, зоне прибрежной полосы, используются те же методы, но на детальной, измельченной сетке. В последние годы активно прорабатывается также методика, согласно которой распространение волны цунами вдали от берега моделируется численно, а накат считается по приближенным аналитическим формулам.

Есть и другой подход, которого мы и придерживаемся в настоящем проекте – счет с выделением линии уреза, т.е. счет в области с подвижной границей. В этом подходе область течения покрывается подвижной сеткой, одна из крайних координатных линий которой совпадает с подвижной линией уреза, движущейся по береговому откосу в сторону суши при накате волн и в сторону моря – при откате. Общим недостатком работ этого направления является отсутствие обоснованной постановки разностных краевых условий в точке уреза.

В настоящем проекте мы определяем положение границы вода-суша, используя в окрестности линии уреза точные аналитические решения рассматриваемых уравнений гидродинамики. Для одномерных уравнений мелкой воды такой подход уже применялся исполнителями проекта: для произвольного рельефа дна и прилегающей суши численное моделирование движения точки уреза выполнялось на основе полученного аналитически закона движения этой точки (*Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26, No. 4. P. 353-377.*)

В отчетный период настоящего проекта мы попытались выполнить обобщение этой методики для плановых уравнений мелкой воды:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_x^1 + \mathbf{f}_y^2 = \mathbf{G}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (13)$$

где  $\Omega$  – область решения (акватория), часть границы которой совпадает с подвижной линией уреза,  $\mathbf{u}$  – вектор решения,  $\mathbf{G}$  – вектор правых частей,  $\mathbf{f}^1$  и  $\mathbf{f}^2$  – векторы потоков:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2 / 2 \\ Huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hv \\ Huv \\ Hv^2 + gH^2 / 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x \\ gHh_y \end{pmatrix},$$

$u, v$  – компоненты вектора скорости в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно,  $H = \eta + h$  – полная глубина слоя воды между дном  $z = -h(x, y)$  и свободной поверхностью  $z = \eta(x, y, t)$ .

Для использования в расчетах подвижных адаптивных сеток необходимо переписать систему уравнений (13) в новых координатах  $q^1, q^2, t$ , связанных с декартовыми координатами  $x, y, t$  невырожденным преобразованием

$$t = t, \quad x = x(q^1, q^2, t), \quad y = y(q^1, q^2, t)$$

с положительным якобианом  $J = x_{q^1} y_{q^2} - x_{q^2} y_{q^1}$ . Здесь  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega$ ,  $\mathbf{q} = (q^1, q^2) \in Q$  – вычислительная область, в качестве которой берется единичный квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$  в плоскости  $q^1 O q^2$ . В численном алгоритме уравнения мелкой воды (13) в новых координатах используются в дивергентной форме

$$(\mathbf{Jv})_t + [(\mathbf{f}^1 - x_t \mathbf{v}) y_{q^2} - (\mathbf{f}^2 - y_t \mathbf{v}) x_{q^2}]_{q^1} + [-(\mathbf{f}^1 - x_t \mathbf{v}) y_{q^1} + (\mathbf{f}^2 - y_t \mathbf{v}) x_{q^1}]_{q^2} = \mathbf{G} \quad (14)$$

и недивергентной

$$\mathbf{Jv}_t + (\mathbf{f}_{q^1}^1 - x_t \mathbf{v}_{q^1}) y_{q^2} - (\mathbf{f}_{q^1}^2 - y_t \mathbf{v}_{q^1}) x_{q^2} - (\mathbf{f}_{q^2}^1 - x_t \mathbf{v}_{q^2}) y_{q^1} + (\mathbf{f}_{q^2}^2 - y_t \mathbf{v}_{q^2}) x_{q^1} = \mathbf{G}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{v}(q^1, q^2, t) = \mathbf{u}(x(q^1, q^2, t), y(q^1, q^2, t), t)$  – вектор решения, записанный в новых координатах.

Подвижная линия уреза (при  $t=0$  она совпадает с нулевой изобатой на рис. 8(а), показанной также в виде линии синего цвета на рис. 8(б)) является для акватории, изображенной на рис. 8, образом левой стороны  $q^1=0$  квадрата  $Q$ . Линия уреза описывается параметрическими уравнениями  $x=\xi(q^2,t)$ ,  $y=\eta(q^2,t)$  ( $0 \leq q^2 \leq 1$ ) с искомыми функциями  $\xi$  и  $\eta$ , которые определяются из условия, что полная глубина на линии уреза равна нулю. Начальное положение  $x=\xi(q^2,0)$ ,  $y=\eta(q^2,0)$  линии уреза известно. Для определения функций  $\xi$ ,  $\eta$  при  $t>0$ , а также компонент вектора скорости на линии уреза выполняется разложение всех функций в окрестности линии уреза в бесконечные ряды по временной переменной  $t$  и подстановка этих рядов в уравнения (15). После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $t$  и учета краевого условия  $H|_{q^1=0}=0$  мы получаем коэффициенты разложений функций  $\xi$  и  $\eta$ . В численном алгоритме полученные формулы для  $\xi$  и  $\eta$  используются не для всего временного промежутка, а только для промежутка, равного шагу по времени, при этом в разложении берутся несколько первых членов. Более подробная информация о способе расчета подвижной линии уреза дана в публикации, готовящейся специально по этой теме.

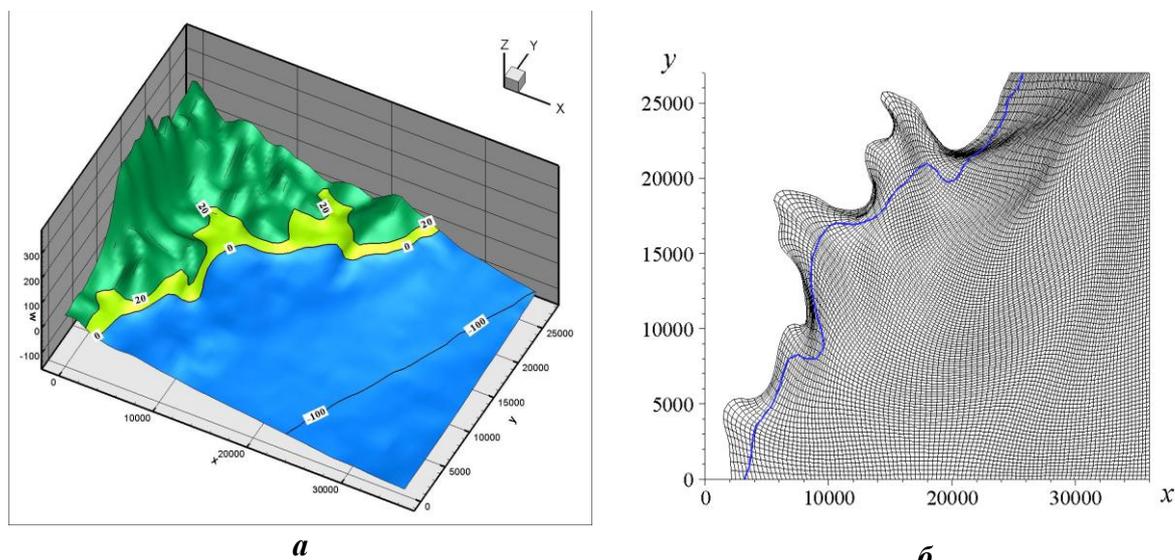


Рис. 8. Рельеф прибрежной зоны (а) с гладкой береговой линией и фрагмент расчетной сетки покрывающей часть суши и прибрежную акваторию (б). Синим цветом выделена начальна линия уреза

Схема предиктор-корректор, использовавшаяся для расчета волн, является двухшаговой, при этом на первом шаге аппроксимируется недивергентное уравнение (15), а на втором – дивергентное (14). Уравнение (15) аппроксимируется в центрах ячеек равномерной прямоугольной сетки  $Q_h$  с шагами  $h_1$  и  $h_2$ , покрывающей вычислительную область  $Q$ , уравнение (14) – во внутренних узлах этой сетки. Отметим одну особенность применяемой схемы. Пусть  $A^1$  и  $A^2$  –матрицы Якоби

$$A^1 = \mathbf{f}_v^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + H & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad A^2 = \mathbf{f}_v^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + H & 0 & 2v \end{pmatrix}.$$

Для них построены такие аппроксимации, что в центрах ячеек сетки  $Q_h$  выполняются следующие равенства для разностных производных:

$$\mathbf{f}_{q^1}^\alpha = A^\alpha \mathbf{v}_{q^1}, \quad \mathbf{f}_{q^2}^\alpha = A^\alpha \mathbf{v}_{q^2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

аналогичные равенствам для функций непрерывного аргумента. Это свойство позволяет вместо производных от потоков  $\mathbf{f}_{q^1}^\alpha, \mathbf{f}_{q^2}^\alpha$  в разностных уравнениях, аппроксимирующих дифференциальное уравнение (15), использовать разностные производные от вектора решения  $\mathbf{v}_{q^1}^\alpha, \mathbf{v}_{q^2}^\alpha$  и применять затем процедуры монотонизации численного решения в каждом из координатных направлений  $Oq^\alpha$  аналогично случаю одномерных уравнений мелкой воды.

Отметим, что в отчетный период была проделана очень большая работа по исследованию свойств схемы предиктор-корректор и ее усовершенствованию как на равномерных, так и на динамически адаптивных сетках. Подробно рассмотрен вопрос о влиянии постоянного, «квазипостоянного» и переменного схемного параметра на монотонность двухслойных разностных схем. Для постоянного схемного параметра построен пример схемы с отсутствием дисперсии в решении второго дифференциального приближения, но не сохраняющей монотонность численного решения. Приведен пример схемного параметра, при котором явная двухслойная схема на подвижной неравномерной сетке является монотонной. Выбор этого параметра основывается на исследовании дифференциальных приближений схем. Подчеркнута связь согласованной аппроксимации якобиана и скоростей движения узлов сетки с геометрическим законом сохранения. Предложен новый подход к построению дивергентных схем на подвижных сетках, например, дивергентной противопоточной схемы.

Кроме того, рассмотрены особенности построения сеток, адаптирующихся к разрывным решениям. Некоторые из этих особенностей продемонстрированы на примере метода эквираспределения. Приведены примеры, связанные с разрешимостью уравнений для сетки и качеством адаптации сетки к решению. Многие схемы, сохраняющие монотонность численного решения, дают на разрывных решениях осциллирующие профили разностных производных, что может негативно сказаться при использовании метода адаптивных сеток: если управляющая функция, регулирующая расстановку узлов, зависит от разностных производных, а они осциллируют, то адаптивная сетка будет иметь чередования длинных и коротких ячеек, что приведет к потере точности численного решения. Осциллирование разностных производных численного решения может быть вызвано, в частности, и «нефизичным» ростом количества экстремумов решения при переходе с одного шага по времени на другой. На примере схемы предиктор-корректор с постоянными коэффициентами показано, что даже TVD-схемы могут увеличивать количество экстремумов. Последний факт является особенно важным, его можно было бы отнести даже к важнейшим результатам отчетного периода, поскольку во многих статьях и даже учебных пособиях для студентов при перечислении положительных качеств TVD-схем ошибочно приводится и свойство невозрастания количества экстремумов при использовании TVD-схем.

Для устранения проблем, связанных с резкими изменениями значений управляющей функции, предлагается использовать процедуру неявного сглаживания управляющей функции, после применения которой в окрестность разрыва попадает большее количество узлов и происходит плавное изменение длин соседних ячеек, что способствует лучшему воспроизведению решений с разрывами.

Приведены примеры, показывающие преимущества метода адаптивных сеток. На рис. 9 показаны профили (1), (2) численного решения задачи с разрывной начальной функцией, полученные по схеме предиктор-корректор с использованием процедуры монотонизации. Видно, что осцилляции в профилях решения отсутствуют, и решение (2) на адаптивной сетке аппроксимирует точное решение задачи (тонкая сплошная

линия) лучше, чем решение (1) на равномерной неподвижной сетке. Кроме того, видно, что использование процедуры монотонизации приводит к лучшему описанию разрыва даже на равномерной сетке по сравнению с результатом (линия 3), полученным по «бездисперсионной» схеме первого порядка аппроксимации.

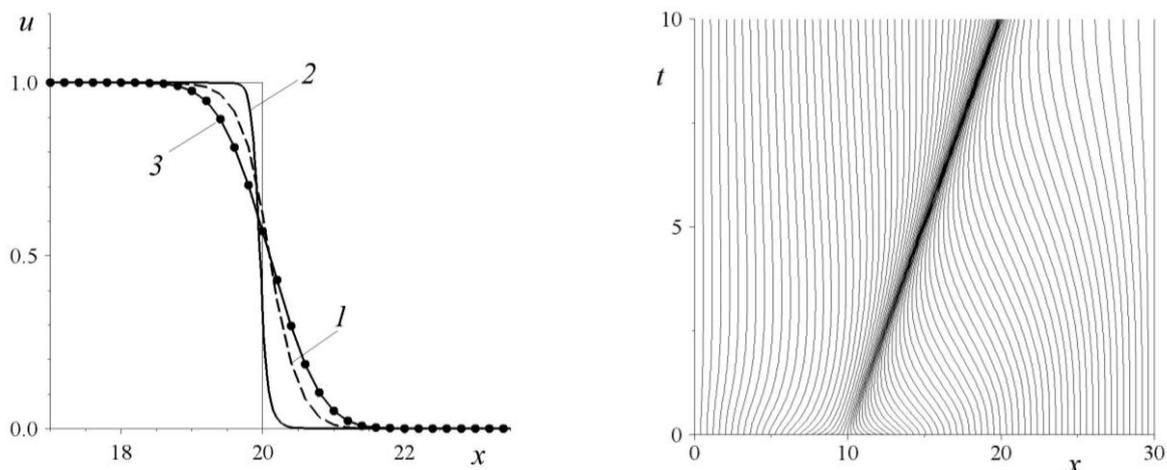


Рис. 9. Профили численного решения (слева) и траектории узлов адаптивной сетки (справа) задаче с разрывной начальной функцией

На рис. 10 показаны профили численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса с гладким точным решением. Видно, что решение (2) на адаптивной сетке визуально неотличимо от точного решения и имеет несомненное преимущество по точности перед решением (1), полученным на равномерной неподвижной сетке.

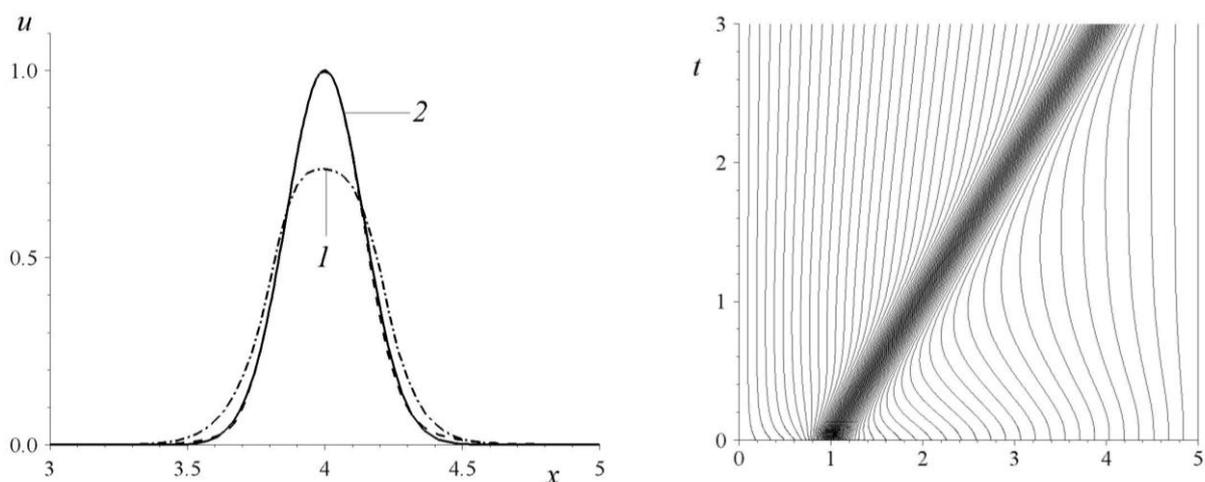


Рис. 10. Профили численного решения (слева) и траектории узлов адаптивной сетки (справа) задаче с гладкой начальной функцией

Кроме того, выработаны некоторые практические рецепты преодоления трудностей, возникающих при решении многомерных задач на адаптивных сетках, уделено внимание тем вопросам, которые не были затронуты в предыдущих публикациях или были недостаточно подробно освещены. В частности, подробно описана конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации на адаптивной сетке для двумерного уравнения переноса и разработан способ аппроксимации контравариантных компонент скорости, гарантирующий выполнение уравнения неразрывности для сеточных функций на подвижных криволинейных сетках. Указан

выбор схемных параметров, при котором сохраняется монотонность численного решения. Выведен геометрический закон сохранения в разностной форме и доказано выполнение разностного аналога геометрического закона сохранения при использовании схемы предиктор-корректор, что гарантирует сохранение ею постоянной функции. Рассмотрены особенности построения сеток, адаптирующихся к разрывным решениям, и предложена модификация классического метода эквираспределения построения подвижных сеток, позволяющая избежать возникновения осцилляций траекторий узлов и резкого изменения площадей соседних ячеек сетки. Проведено сравнение результатов решения тестовых задач с гладким и разрывным решениями на неподвижных и динамически адаптивных сетках.

В качестве примера на рис. 11 показаны графики численного решения начально-краевой задачи для двумерного уравнения переноса с переменными коэффициентами. Точным решением этой задачи является экспоненциальная «шапочка» единичной высоты, которая без изменения формы и с постоянной угловой скоростью вращается как твердое тело вокруг начала координат. На рисунках 11, (а)-(в) показаны результаты, полученные на «квазиравномерной» сетке, которая адаптировалась лишь к криволинейной границе области и не учитывала поведение решения. Видно, что использование схемы предиктор-корректор (в) позволяет избежать появления численных осцилляций, возникающих в схеме Лакса-Вендроффа (см. изолинии на рис. 11, б), а также сильного размазывания решения и значительного искажения изолиний при применении противопоточной схемы (см. рис. 11, а). Из рис. 11 (г) видно, что форма, изолинии и амплитуда решения на подвижной адаптивной сетке сохраняются с течением времени значительно лучше, чем на «квазиравномерной» неподвижной сетке с тем же количеством узлов. Адаптивная сетка в этом примере строилась методом эквираспределения с использованием управляющей функции, которая обеспечивала сильное сгущение узлов под вершиной «шапочки», вращающееся вместе с ней.

На рис. 12 представлены результаты решения тестовой задачи для двумерного уравнения переноса при задании разрывной начальной функции в виде ступеньки. График начальной функции изображен на рис. 12 (б) в виде разрывной поверхности 1. Точное решение является в каждый момент времени кусочно-постоянной функцией, прямолинейная линия разрыва которой вращается с единичной угловой скоростью вокруг начала координат. Из-за подвижности линии разрыва и криволинейности границ области получить качественное численное решение этой задачи на прямоугольных неподвижных сетках не представляется возможным. Поэтому целесообразно применение криволинейных сеток. На рис. 12 (б) показан график 2 численного решения, полученного по схеме предиктор-корректор на «квазиравномерной» сетке и для сравнения изображен график 3 решения на динамически адаптивной сетке (см. рис. 12, а) с тем же числом узлов, сгущающейся в окрестности подвижного разрыва, при этом для лучшего представления контур поверхности 3 показан жирной линией. Видно, что схема предиктор-корректор обеспечивает для этой задачи монотонность численного решения, а на адаптивной подвижной сетке поверхность разрыва передается существенно лучше, чем на неподвижной «квазиравномерной» сетке. Проведенные эксперименты показали, что схема Лакса-Вендроффа дает нефизичные осцилляции, а противопоточная схема сильнее размазывает разрыв в сравнении со схемой предиктор-корректор.

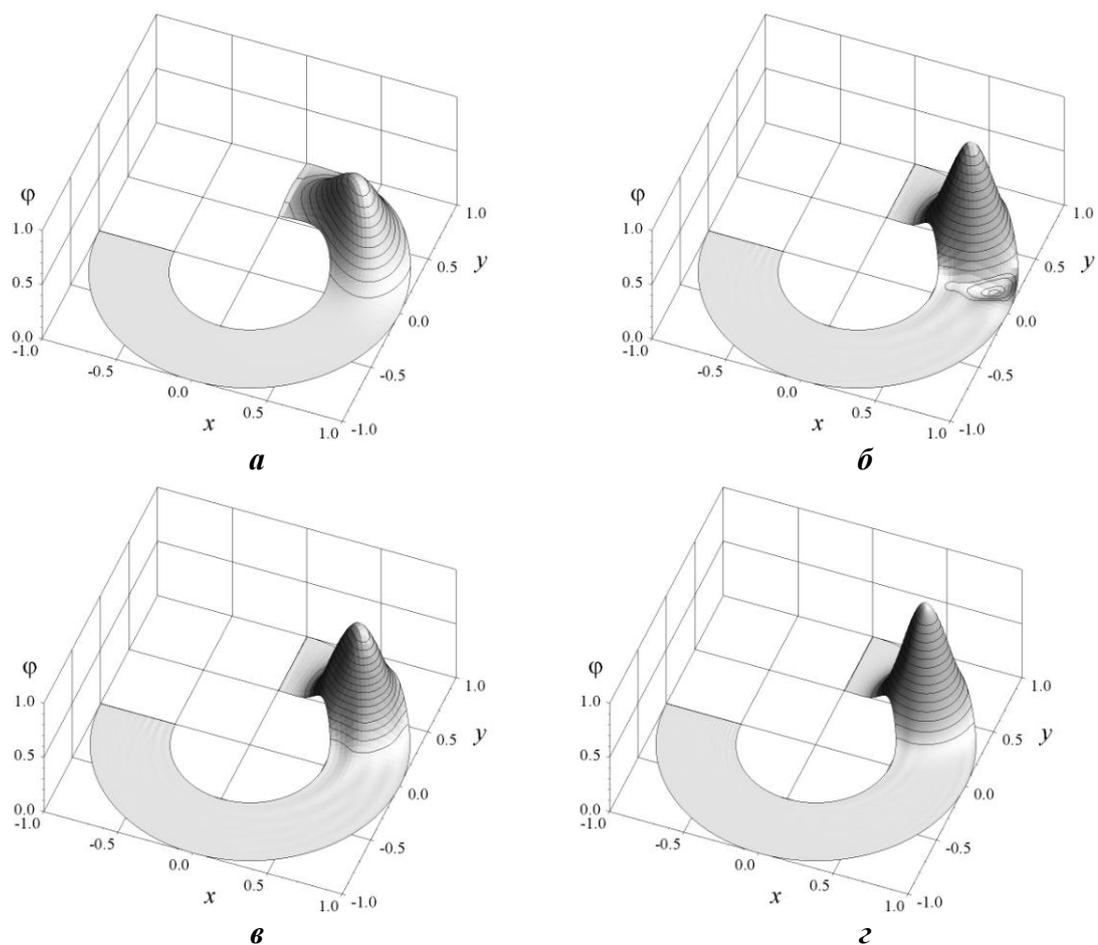


Рис.11. Задача для двумерного уравнения переноса с гладкой начальной функцией. Графики численного решения, полученного по схемам противопоточной (*а*), Лакса-Вендроффа (*б*) и предиктор-корректор (*в*) на «квазиравномерной» сетке; по схеме предиктор-корректор на динамически адаптивной сетке (*г*)

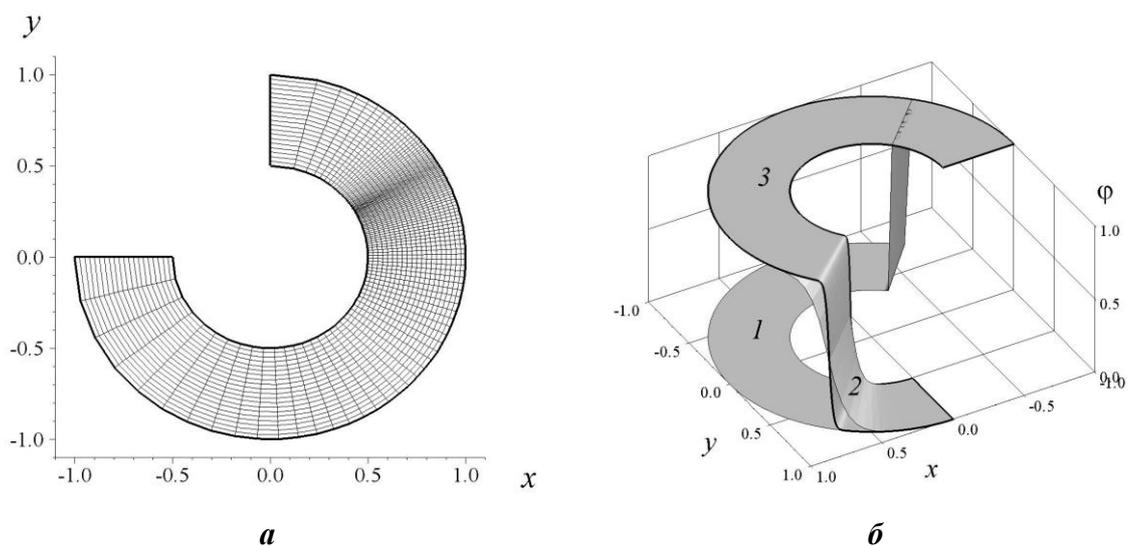


Рис. 12. Задача для двумерного уравнения переноса с разрывной начальной функцией. Адаптивная сетка в конечный момент времени (*а*) и графики численного решения (*б*) в начальный момент времени (*1*) и в конечный момент времени на «квазиравномерной» сетке (*2*) и динамически адаптивной сетке (*3*)

Результаты методических исследований, выполненных нами для уравнения переноса, имеют общий характер, поэтому они существенно использовались при численном решении задач наводнения-осушения в рамках модели мелкой воды, в частности при конструировании схемы на адаптивной сетке для уравнения (13) и построении криволинейных сеток, наподобие той, что изображена на рис. 8 (б). Поскольку динамически адаптивная сетка должна перестраиваться при переходе с одного временного слоя на другой, то временные затраты на ее построение становятся столь большими, что значительно превосходят затраты на решение самих разностных уравнений явной схемы предиктор-корректор.

Для сокращения таких затрат мы применяли следующий прием. В расчетах использовались две криволинейные сетки. Первая, называемая базовой, строилась заранее, до решения задачи, она покрывала акваторию и часть прилегающей к ней суши. На рис. 8 изображена именно базовая сетка. Ее крайняя левая координатная линия проходит по суше, например, по некоторой изолинии рельефа, на достаточном удалении от начальной линии уреза, на удалении, гарантирующем, что при накате волна никогда не дойдет до этой линии. Вторая сетка, называемая расчетной, строилась на каждом шаге по времени, адаптировалась к решению, но была в некотором смысле «одномерной», поскольку ее узлы не могли перемещаться произвольным образом в двух направлениях, а могли двигаться только вдоль координатных линий одного семейства базовой сетки. Применительно к базовой сетке, показанной на рис. 8 (б), это означает, что узлы могли перемещаться вдоль координатных линий первого семейства, при этом крайние левые узлы расчетной сетки всегда совпадают с точками пересечения текущего положения линии уреза с координатными линиями первого семейства базовой сетки, и расположение узлов расчетной сетки определяется путем решения одномерных уравнений метода эквираспределения для построения сетки на плоских кривых, каковыми в данном случае являются координатные линии первого семейства базовой сетки.

Такой подход решения плановых задач наката-отката был разработан в отчетный период и применялся для определения зон затопления при накате волн цунами на берег. Однако оказалось, что этот подход имеет существенные ограничения. Например, таким путем мы не могли решать задачи с сильно изрезанной береговой линией (см. рис. 13, а), поскольку в этом случае трудно построить базовую сетку так, чтобы каждая ее координатная линия первого семейства пересекала начальную линию уреза только в одной точке (на рис. 13 (б) для некоторых координатных линий наблюдается пересечение в нескольких точках). Но даже в случае береговой линии с плавно меняющейся начальной линией уреза по мере продвижения волны на сушу иногда получались столь сложные формы линии уреза, что описанный алгоритм расчета наката переставал работать. В частности это происходило и в том случае, когда односвязная область, занятая водой, превращалась в многосвязную за счет образования в процессе затопления отдельных островов. На следующем этапе выполнения проекта будет предпринята попытка усовершенствования разработанного алгоритма расчета наката волн на берег в направлении расширения круга решаемых задач, а также применения других подходов, например, метода сквозного счета.

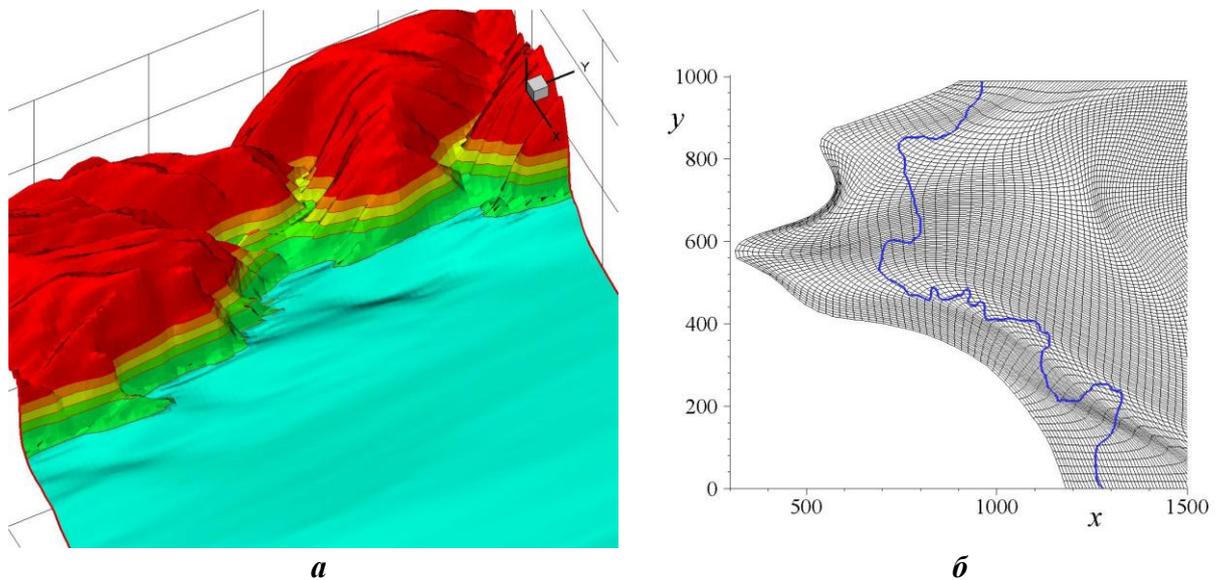


Рис. 13. Рельеф прибрежной зоны (а) с сильно изрезанной береговой линией и фрагмент расчетной сетки, покрывающей часть суши и прибрежную акваторию (б). Синим цветом выделена начальная линия уреза

- 3.10.1.1 *Количество научных работ, опубликованных в ходе выполнения проекта*  
8
- 3.10.1.2 *Из них включенных в перечень ВАК*  
8
- 3.10.1.3 *Из них включенных в системы цитирования (Web of science, Scopus, Web of Knowledge, Astrophysics, PubMed, Mathematics, Chemical Abstracts, Springer, Agris, GeoRef)*  
8
- 3.10.2. *Количество научных работ, подготовленных в ходе выполнения проекта и принятых к печати в 2012 г.*  
2
- 3.11. *Участие в научных мероприятиях по тематике проекта, которые проводились при финансовой поддержке Фонда*
- 3.12. *Участие в экспедициях по тематике проекта, проводимых при финансовой поддержке Фонда*
- 3.13. *Финансовые средства, полученные от РФФИ*  
375000 руб.
- 3.15. *Адреса (полностью) ресурсов в Internet, подготовленных авторами по данному проекту*
- 3.16. *Библиографический список всех публикаций по проекту за весь период выполнения проекта, предшествующий данному отчету, в порядке значимости: монографии, статьи в научных изданиях, тезисы докладов и материалы съездов, конференций и т.д.*
1. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558.
  2. Shokina N.Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 603-626.
  3. Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690-699.

4. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 78-98.
5. Соммер А.Ф., Шокина Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на двумерных подвижных сетках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 4. С. 88-108.
6. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94-108.
7. Гусев О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 46-64.
8. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Оценка высот волн, вызванных подводным оползнем в ограниченном водоеме // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 67-78.

- 3.17. *Приоритетное направление развития науки, технологий и техники РФ, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*  
рациональное природопользование
- 3.18. *Критическая технология РФ, в которой, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*  
Технологии мониторинга и прогнозирования состояния окружающей среды, предотвращения и ликвидации ее загрязнения
- 3.19. *Основное направление технологической модернизации экономики России, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*  
не очевидно

*Подпись руководителя проекта*

## **Форма 510. ЗАЯВКА НА 2013 г.**

10.1. *Номер проекта*  
12-01-00721

10.2.1. *Основной код классификатора*  
01-223

10.2.2. *Дополнительные коды классификатора*  
05-513

10.3. *Ключевые слова*

волны цунами в океане, подводные оползни, накат волн на берег, математическое моделирование, иерархия нелинейных моделей мелкой воды, дисперсионные эффекты, эффекты, связанные со сферичностью и вращением Земли, адаптивные численные методы

10.4. *Цели очередного годовичного этапа, связь с основной задачей проекта*

Согласно общему плану работ на весь срок выполнения проекта одной из задач проекта является задача разработки численных алгоритмов для моделирования длинных поверхностных волн в рамках полной нелинейно-дисперсионной модели с учетом сферичности Земли и ее вращения, а также разработка новых алгоритмов, основанных на приближенных нелинейно-дисперсионных моделях на сфере, типа модели Буссинеска. В 2012 году для плоского случая были получены новые слабо дисперсионные уравнения для волн малой амплитуды, допускающие, в отличие от классических уравнений Буссинеска, в качестве своего следствия закон сохранения полной энергии и возможность расщепления на равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления и гиперболическую систему уравнений относительно полной глубины и вектора скорости. Целью очередного этапа является обобщение этих результатов на сферический случай: вывод приближенных нелинейно-дисперсионных моделей на сфере, допускающих закон сохранения энергии, и разработка на их основе эффективных конечно-разностных алгоритмов для описания распространения длинных поверхностных волн на вращающейся притягивающей сфере; для полной НЛД- модели на сфере получить закон изменения полной энергии при движении жидкости со свободной границей над подвижным дном и разработать алгоритм численного решения.

Другой задачей проекта предусматривалась разработка адаптивных численных алгоритмов для исследования поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня пространственно неоднородной формы по пространственно неоднородному склону. В 2012 году был выполнен сравнительный анализ результатов численного моделирования процесса генерации поверхностных волн подводным оползнем, скользящим по неровному дну («одномерному») ограниченного водоема, на основе модели мелкой воды, нелинейно-дисперсионных моделей и модели потенциальных течений жидкости со свободной границей. В соответствии с общим планом работ в 2013 году предполагается проделать аналогичную работу для пространственного случая: выполнить сравнительный анализ результатов численного моделирования на адаптивных сетках процесса генерации поверхностных волн подводным оползнем в ограниченном водоеме в рамках плановой модели мелкой воды первого приближения, плановой полной нелинейно-дисперсионной модели, двух разработанных на первом этапе приближенных моделей Буссинеска и модели трехмерных потенциальных течений жидкости со свободной границей.

Третьей задачей проекта является разработка алгоритмов для расчета криволинейной подвижной линии уреза. В 2012 году разработан и программно реализован алгоритм для расчета зон затопления волной цунами, основанный на использовании метода адаптивных сеток и аппроксимации краевых условий на подвижной линии уреза с учетом локально-аналитических решений плановых уравнений мелкой воды. Оказалось,

что этот подход имеет существенные ограничения. Например, таким путем мы не могли решать задачи с сильно изрезанной береговой линией. Но даже в случае береговой линии с плавно меняющейся начальной линией уреза по мере продвижения волны на сушу иногда получались столь сложные формы линии уреза, что описанный алгоритм расчета наката переставал работать. В частности, это происходило в том случае, когда односвязная область, занятая водой, превращалась в многосвязную за счет образования в процессе затопления отдельных островов. Поэтому в 2013 году будет предпринята попытка усовершенствования разработанного алгоритма расчета наката волн на берег в направлении расширения круга решаемых задач, а также применения других подходов. Основной целью следующего этапа будет сравнительный анализ результатов численного моделирования процессов наката волн на берег на основе методики, использующей аналитические решения уравнений мелкой воды на линии уреза (с выделением подвижной линии уреза), метода сквозного счета (без выделения линии уреза), а также методики пересчета максимального наката волны на сушу по максимальным высотам заплеска на вертикальную стенку, установленную на некоторой глубине.

#### *10.5. Ожидаемые в конце 2013 г. научные результаты*

Будут выведены приближенные нелинейно-дисперсионные модели мелкой воды на сфере, допускающие закон сохранения энергии, получен закон изменения полной энергии для полной НЛД- модели на сфере и на основе этих моделей разработаны конечно-разностные алгоритмы для описания распространения длинных поверхностных волн на вращающейся притягивающей сфере с учетом центробежной силы.

Будет выполнен сравнительный анализ результатов численного моделирования на адаптивных сетках процесса генерации поверхностных волн подводным оползнем в ограниченном водоеме в рамках плановой модели мелкой воды первого приближения, плановой полной нелинейно-дисперсионной модели, двух разработанных на первом этапе приближенных моделей Буссинеска и модели трехмерных потенциальных течений жидкости со свободной границей.

Будет выполнен сравнительный анализ результатов численного моделирования процессов наката волн на берег на основе методики, использующей аналитические решения уравнений мелкой воды на линии уреза, метода сквозного счета, методики пересчета максимального наката волны на сушу по максимальным высотам заплеска на криволинейную вертикальную стенку, установленную вблизи берега на некоторой глубине.

#### *10.6.1. Общий объем финансирования на 2013 год* 480000

#### *10.6.1. Детальная расшифровка предполагаемых расходов*

Заработная плата- 243472 Прочие выплаты (командировки и служебные разъезды в части оплаты суточных)- 6000 Начисления на фонд оплаты труда (страховые взносы), включая тариф на обязательное социальное страхование от несчастных случаев на производстве и профессиональных заболеваний (30,2%)- 73528 Транспортные услуги, в т.ч. оплата транспортных расходов при командировках и служебных разъездах- 45000 Прочие услуги, в т.ч. оплата проживания на время нахождения в служебной командировке- 40000 ИТОГО РАСХОДОВ- 408000 Организационно-техническое сопровождение проекта (до 15%)- 72000 ВСЕГО (100%)- 480000

#### *10.7.1. Сроки проведения в 2013 г. экспедиции по тематике проекта*

#### *10.7.2. Ориентировочная стоимость экспедиции (в руб.)*

#### *10.7.3. Регион проведения экспедиции*

#### *10.7.4. Название района проведения экспедиции*