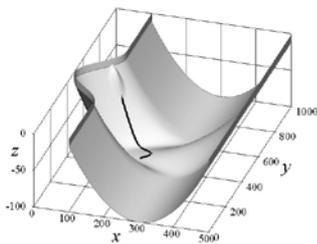


## Расширенная аннотация отчета по проекту РФФИ № 12-01-00721

Фундаментальная проблема, на решение которой направлен проект, связана с разработкой адаптивных численных алгоритмов для моделирования распространения поверхностных волн и их наката на берег в рамках новых нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды. В настоящее время для численного моделирования процесса распространения длинных поверхностных волн используется, как правило, бездисперсионная модель мелкой воды. Новые натурные данные, появившиеся после сильнейших цунами 2004 и 2011 гг., свидетельствуют о том, что для моделирования распространения волн цунами в ряде случаев требуются более сложные математические модели, способные отражать вертикальную структуру течения, а также учитывать дисперсию волн и эффекты, обусловленные сферичностью и вращением Земли.

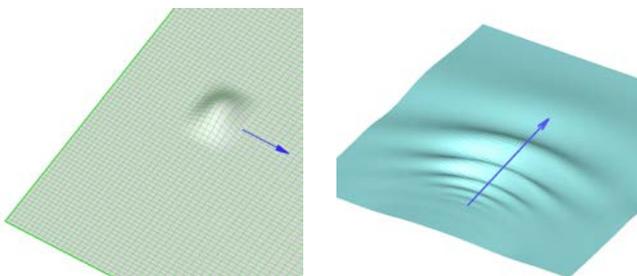


В отчетный период выполнен вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики, не использующий предположения о малости амплитуды волн (полная НЛД-модель на сфере) и о потенциальности исходного трехмерного течения. Получены также новые модели типа Буссинеска на сфере для течений над подвижным или медленно меняющимся неровным дном, причем структура уравнений этих приближенных НЛД-моделей полностью идентична структуре уравнений полной НЛД-модели. Для полученных моделей найдены законы изменения полной энергии, имеющие важное значение для верификации численных алгоритмов. Разработан единый для всех моделей численный алгоритм, основанный на расщеплении систем НЛД-уравнений на эллиптическую и гиперболическую части.



*Траектория движения оползня по неровному дну водоема*

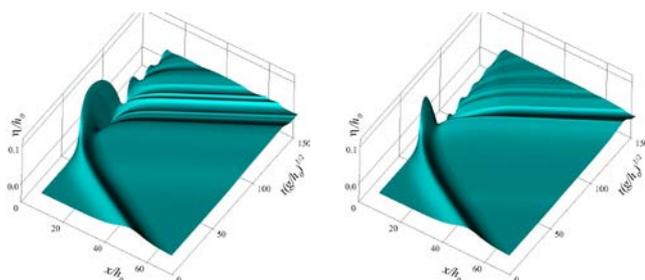
Изучено влияние дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в ограниченных водохранилищах. При этом исследовались поверхностные волны, возникающие при движении модельного «трехмерного» оползня по склону «трехмерного» модельного водоема. Новизна этих исследований связана с использованием новых уравнений движения оползня, учитывающих неровность подводного склона, применением в расчетах адаптирующихся сеток, а также сравнительного анализа результатов расчетов на основе иерархии математических моделей: бездисперсионной модели мелкой воды, полной и приближенных НЛД-моделей и модели трехмерных потенциальных течений жидкости.



*Оползень пространственной формы, скользящий по плоскому откосу (слева), и генерируемые им поверхностные волны в расчете по трехмерной модели жидкости (справа)*

Для плоского откоса выполнено сравнение результатов расчетов с известными лабораторными данными о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу. На основе этих сравнений установлено, что НЛД-модель удовлетворительно описывает большее число волн, чем бездисперсионная модель мелкой воды, в частности, результаты расчетов по НЛД-модели лучше соответствуют экспериментальным данным по значениям локальных экстремумов генерируемых волн. На завершающем этапе выполнения проекта планируется исследовать процесс нелинейного взаимодействия волн, генерируемых оползнем, с уединенной волной, движущейся к берегу. Ожидается, что при некоторых начальных условиях

взаимодействие уединенной и «оползневых» волн может привести к резонансному усилению заплеска на берег.



*Динамика свободной поверхности при накате уединенной волны на криволинейный откос (слева) и на аппроксимирующий его плоский*

суше. Разработана процедура восстановления границы затопления суши по результатам решения одномерных задач. Для расчета наката в одномерных сечениях использовались два метода: модифицированный метод сквозного счета и метод с выделением линии разрыва (метод адаптивных сеток). Выполнено сравнение этих методов на задачах наката уединенной волны на плоский откос и криволинейный. Интересной особенностью взаимодействия уединенной волны с пологими откосами является колебательный характер процесса наката-отката с затухающей амплитудой колебаний. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что в задачах наката замена криволинейного откоса на плоский может привести к большим погрешностям при определении зоны затопления. В отличие от плоского откоса, в случае криволинейного волна продвигается по склону, выполаживающемуся по мере удаления от берега, и поэтому она проходит по суше большее расстояние (по горизонтали), чем в случае плоского откоса. Сильно различаются также картины взаимодействия волны с берегом: после наката волны на плоский откос, она скатывается с него с образованием основной отраженной волны. Для криволинейного же склона отраженная волна возникает в момент времени, когда на суше еще продолжается накат. На завершающем этапе предполагается усовершенствовать методику расчета наката, заменив моделирование вдоль одномерных сечений на двумерное моделирование.

### **Важнейшие публикации по проекту**

1. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // RJNAMM. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558.
2. Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690-699.
3. Shokina N.Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids // RJNAMM. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 603-626.
4. Гусев О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 46-64.
5. Федотова З.И., Хакимянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94-108.
6. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90.
7. Хакимянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 54-79.
11. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics // RJNAMM. 2014. Vol. 29, No. 3. (принята в печать)
8. Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах для расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 1. (принята в печать)
9. Федотова З.И., Хакимянов Г.С. Новый вывод нелинейно-дисперсионной модели на вращающейся сфере и законы сохранения // ПМТФ. 2014. Т. 55. (принята в печать)
10. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И., Хакимянов Г.С., Чубаров Л.Б., Шокина Н.Ю. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. (принята в печать)

В отчетный период разработан комбинированный метод численного моделирования наката волн цунами на побережье, основанный на использовании двумерной модели мелкой воды для расчета распространения волны от источника землетрясения к побережью и одномерного моделирования наката вдоль сечений, проведенных от некоторой прибрежной изобаты до выбранной изолинии рельефа на

## ОТЧЕТ ЗА 2013 ГОД ПО ПРОЕКТУ РФФИ 12-01-00721-а

### Форма 503. РАЗВЕРНУТЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ

#### 3.1. Номер проекта:

12-01-00721

#### 3.2. Название проекта:

Разработка адаптивных алгоритмов для численного моделирования поверхностных волн на мелкой воде с учетом сферичности и вращения Земли

#### 3.3. Коды классификатора, соответствующие содержанию фактически проделанной работы (в порядке значимости):

01-223 01-207

#### 3.4. Объявленные ранее цели проекта на 2013 год:

Вывести приближенные нелинейно-дисперсионные модели на сфере, допускающие закон сохранения полной энергии, получить закон изменения энергии для полной НЛД- модели на сфере, на основе этих новых моделей разработать конечно-разностные алгоритмы для описания распространения длинных поверхностных волн на вращающейся притягивающей сфере с учетом центробежной силы.

Выполнить численное моделирование генерации поверхностных волн подводным оползнем в ограниченном водоеме в рамках плановой модели мелкой воды первого приближения, плановой полной нелинейно-дисперсионной модели, двух разработанных авторами приближенных нелинейно-дисперсионных моделей Буссинеска и модели трехмерных потенциальных течений жидкости со свободной границей.

Провести сравнительный анализ результатов численного моделирования процессов наката волн на берег на основе методики, использующей аналитические решения уравнений мелкой воды на линии уреза (с выделением подвижной линии уреза) и метода сквозного счета (без выделения линии уреза).

#### 3.5. Степень выполнения поставленных в проекте задач:

В полном объеме выполнены работы по выводу нелинейно-дисперсионных уравнений на сфере, допускающих закон изменения полной энергии (в случае неподвижного дна - закон сохранения полной энергии), и разработке конечно-разностных алгоритмов на прямоугольных сетках для расчета распространения длинных поверхностных волн в рамках как приближенных нелинейно-дисперсионных моделей на сфере, так и полной.

Предусмотренные планом работы по численному моделированию поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному склону ограниченного водохранилища также выполнены. При этом исследовались поверхностные волны, возникающие при движении модельного оползня пространственно неоднородной формы по склону модельного водоема с пространственно неоднородной формой дна. Для плоского откоса выполнено также сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными.

Выполнено сравнение двух конечно-разностных методов, предназначенных для расчета наката поверхностных волн на берег: метода адаптивных сеток (с выделением подвижной линии уреза) и метода сквозного счета (без выделения линии уреза). Для плоского откоса выполнено также сравнение результатов расчетов с аналитическими решениями и экспериментальными данными.

#### 3.6. Полученные важнейшие результаты:

Для случая сферической геометрии выполнен вывод нелинейно-дисперсионных уравнений

волновой гидродинамики, не использующий предположение о потенциальности исходного трехмерного течения. Получены слабо дисперсионные нелинейные модели типа Буссинеска на вращающейся притягивающей сфере, описывающие течения жидкости над неровным подвижным дном. Для полученных моделей найдены законы изменения полной энергии. Разработан единый для всех моделей численный алгоритм, основанный на расщеплении систем нелинейно-дисперсионных уравнений на эллиптическую и гиперболическую части.

С использованием разработанных алгоритмов для плановых нелинейно-дисперсионных моделей изучено влияние дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в ограниченных водохранилищах. Выполнено сравнение с численными результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды и модели трехмерных потенциальных течений, а также с имеющимися экспериментальными данными измерений высот волн, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу.

Разработанный в рамках модели мелкой воды численный алгоритм метода адаптивных сеток применен для расчета зон затопления в условиях реальной батиметрии прибрежной акватории, реального рельефа суши, прилегающей к линии уреза, и реальной формы набегающей волны. Выполнено сравнение с методом сквозного счета, с аналитическими решениями и экспериментальными данными для плоского откоса.

### 3.7. Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта

В настоящее время для численного моделирования процесса распространения в океанах и морях длинных поверхностных волн используется, как правило, модель мелкой воды, полученная в предположении, что толщина слоя воды мала, вертикальная компонента вектора скорости частиц воды равна нулю, а горизонтальные компоненты не зависят от вертикальной координаты. Новые натурные данные, появившиеся после сильнейших цунами (2004 и 2011 гг.), свидетельствуют о том, что для моделирования распространения волн цунами в ряде случаев требуются более сложные математические модели, способные отражать вертикальную структуру течения, а также учитывать дисперсию волн и эффекты, обусловленные сферичностью и вращением Земли. Первая такая модель на вращающейся притягивающей сфере, выведенная без предположения о малости амплитуды волн (полная нелинейно-дисперсионная (НЛД-) модель на сфере), была получена участниками проекта в 2011 году (Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения полной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 22-35).

В отчетный период был выполнен новый вывод нелинейно-дисперсионных уравнений на вращающейся притягивающей сфере, не использующий условие потенциальности исходного трехмерного течения, т.е. вывод сделан при более слабом, чем в указанной публикации, ограничении на скорость трехмерного течения жидкости над подвижным дном. Вывод основан на предварительном масштабировании уравнений Эйлера на сфере и введении малых параметров, позволяющих оценить вклад нелинейности, дисперсии, подвижности дна и эффектов, связанных со сферичностью Земли и ее вращением. Уравнения этой модели имеют следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (Hc) = 0, \quad (1)$$

$$v_t + (c \cdot \nabla)v + g \nabla \eta = \frac{1}{H} \nabla \left( \frac{H^3}{3} Q_1 + \frac{H^2}{2} Q_2 \right) - \nabla h \left( \frac{H}{2} Q_1 + Q_2 \right) + q, \quad (2)$$

где  $H = \eta + h$  – полная глубина слоя воды,  $c = c(\lambda, \theta, t) = (c^1, c^2)^T$  – средняя по толщине слоя скорость, выраженная через контравариантные компоненты,  $v = (v_1, v_2)^T$  – скорость, записанная через ковариантные компоненты,  $v_1 = g_{10} + g_{11}c^1$ ,  $v_2 = g_{22}c^2$ ;  $g_{10} = \Omega R^2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{11} = R^2 \sin^2 \theta$ ,  $g_{22} = R^2$  – ковариантные компоненты метрического

тензора вращающейся сферы,  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ ,  $q_1 = 0$ ,  
 $q_2 = 1/2(\Omega + c^1)^2 \partial g_{11} / \partial \theta$ ;  $Q_1 = D(\nabla \cdot \mathbf{c}) - (\nabla \cdot \mathbf{c})^2$ ,  $Q_2 = D^2 h$ ,  $D = \partial / \partial t + \mathbf{c} \cdot \nabla$ ,  
 $\nabla = (\partial / \partial \lambda, \partial / \partial \theta)$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{c} = c_\lambda^1 + (c^2 \sin \theta)_\theta / \sin \theta$ ,  $r = R - h(\lambda, \theta, t)$  – уравнение подвижного  
дна,  $R$  – средний радиус Земли,  $\theta = \pi/2 - \varphi$ ,  $\lambda$  – долгота,  $\varphi$  – широта,  $g$  – ускорение  
силы тяжести.

Получены также новые модели типа Буссинеска на сфере для течений над подвижным или медленно меняющимся неровным дном, причем структура уравнений этих приближенных НЛД-моделей полностью идентична структуре уравнений (1) полной НЛД-модели, что позволило применить единый подход к построению численных алгоритмов для выведенных нами полной и слабо-дисперсионных моделей на сфере.

Кроме того, для каждой из НЛД-моделей на сфере получено выражение для полной энергии, вытекающее из вида полной энергии трехмерных уравнений Эйлера при учете условий вывода моделей. Выписаны уравнения баланса полной энергии, которые можно использовать для верификации численных алгоритмов. Важным обстоятельством является согласованность уравнений баланса энергии приближенных и исходной гидродинамических моделей. Здесь имеется в виду следующее. Если в законе сохранения энергии трехмерной модели использовать разложение компонент скорости по малому параметру, отвечающему за дисперсию, и применить те же упрощающие предположения, при которых были получены уравнения неразрывности и движения НЛД-модели, то мы должны получить закон баланса энергии для этой НЛД-модели. С другой стороны, закон баланса энергии может быть получен и путем эквивалентных преобразований самих НЛД-уравнений, без привлечения трехмерной модели. Эти два закона для выведенных нами НЛД-моделей совпадают, т.е. эти модели допускают в качестве своего следствия закон баланса полной энергии. При этом в случае неподвижного дна полученные для сферы уравнения баланса переходят в консервативные законы сохранения, что способствует построению корректных разностных аппроксимаций для численных расчетов.

Полученные в отчетный период результаты, связанные с выводом НЛД-моделей на вращающейся сфере, адекватно отражены в принятой в печать статье (Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. *Новый вывод нелинейно-дисперсионной модели на вращающейся сфере и законы сохранения // ПМТФ. 2014. Т. 55*) и трудах Международной конференции (Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. *Нелинейно-дисперсионные модели на вращающейся сфере: новый вывод и законы сохранения // Доклады Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.), 8 стр. – Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146812/151531/Paper-MIT-2013.pdf>*)

Отметим, что НЛД-модели на сфере впервые были получены нашим коллективом благодаря большому опыту, приобретенному при выводе плановых (без учета сферичности) НЛД-моделей на плоскости и подытоженному в принятой в печать работе (Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. *On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3*). В этой работе дан новый вывод плановых нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики без предположения о потенциальности трехмерного течения. Кроме полностью нелинейных НЛД-уравнений, выведены приближенные слабо-нелинейные уравнения типа Буссинеска, сохраняющие основные свойства полных НЛД-уравнений – те свойства, которые присущи трехмерным уравнениям гидродинамики и могут быть утеряны при их упрощении. Наличие у полученных НЛД-моделей свойств, связанных с законами сохранения, позволяет осуществлять контроль точности численных алгоритмов и выгодно отличает полученные нами модели от известных слабо-дисперсионных моделей на плоскости, которые не

обладают законом изменения энергии. Например, для часто используемой в расчетах слабо-дисперсионной модели Перегринана аналог закона сохранения энергии не выполняется даже в случае горизонтального дна.

Проделанная работа для плоского случая открыла путь к получению «правильных» НЛД-моделей на сфере, моделей, снабженных уравнением энергии. В качестве дополнительного критерия правильности вывода иерархии НЛД-моделей на сфере использовался прием предельного перехода от сферического случая к плоскому. Установлено, что в бесконечно малой окрестности произвольной точки на вращающейся сфере полученные НЛД-уравнения на сфере переходят при  $R \rightarrow \infty$  к соответствующим плановым НЛД-уравнениям.

Перейдем теперь к рассмотрению численных алгоритмов для решения полученных НЛД-уравнений на вращающейся притягивающей сфере. Уравнение движения НЛД-модели (2) содержит смешанные производные высокого порядка от компонент вектора скорости, непосредственная аппроксимация которых приводит к сложной разностной задаче, не поддающейся исследованию. Поэтому необходимо выполнить предварительный модульный анализ задачи для того чтобы свести ее решение к последовательному решению так называемых «простых задач», для которых эффективные численные алгоритмы либо существуют, либо их можно построить в виде, позволяющем выполнить исследование и обоснование. Однако для системы (1) (2) НЛД-уравнений на сфере модульный анализ затруднен, поэтому вновь обратимся к опыту решения нелинейно-дисперсионных уравнений на плоскости.

В принятой в печать работе (Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Шокина Н.Ю. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1) предлагается метод расщепления, сводящий сложную плановую (плоскую) задачу для НЛД-уравнений к двум более простым: к системе уравнений гиперболического типа и уравнению эллиптического типа. Такая декомпозиция задачи стала возможной благодаря замеченной аналогии уравнения движения, переписанного в терминах скорость-давление, с неоднородным уравнением движения для течения газа. В задачах же газовой динамики для численного решения часто используется подход с выделением в качестве одной из простых задачи определения давления. Замеченная аналогия позволяет и для НЛД-уравнений на плоскости сформулировать «простую задачу» для определения давления в виде краевой задачи для скалярного равномерно эллиптического уравнения. Тогда вторая «простая задача» будет заключаться в решении системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе бездисперсионных уравнений мелкой воды и отличающейся от последней лишь правой частью.

В вышедшей из печати работе (Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90) подход, связанный с расщеплением системы полных НЛД-уравнений, применен также для численного решения задач в рамках выведенных авторами слабо дисперсионных моделей типа Буссинеска. Это позволило построить единый для всех моделей численный алгоритм, основанный на аппроксимации расщепленной системы уравнений, состоящей из уравнения эллиптического типа для негидростатической составляющей давления и системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды первого приближения. В готовящейся к публикации работе (Гусев О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках плановых нелинейно-дисперсионных моделей на подвижном дне // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19) будут подробно описаны методы получения конечно-разностных схем и разностных краевых условий, а также алгоритмы решения полученных разностных задач.

В сферическом случае уравнение движения (2) также можно записать в терминах

скорость-давление:

$$Hv_t + H(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = p_0 \nabla h + \mathbf{q}H, \quad (3)$$

где через  $p$  обозначено давление в НЛД-модели, проинтегрированное по глубине слоя жидкости, а  $p_0$  означает давление на дне:

$$p = g \frac{H^2}{2} - \left( \frac{H^3}{3} Q_1 + \frac{H^2}{2} Q_2 \right), \quad p_0 = gH - \left( \frac{H^2}{2} Q_1 + HQ_2 \right).$$

Запись уравнения движения в форме (3) позволяет и в сферическом случае использовать подход с выделением в качестве отдельной задачи определения дисперсионной составляющей давления  $\varphi = H^3 Q_1 / 3 + H^2 Q_2 / 2$ . При этом для  $\varphi$  получается равномерно эллиптическое уравнение, не содержащее производных по времени от искомым величин и отличающееся от плоского случая лишь наличием членов, обусловленных вращением Земли, а уравнение движения (3) принимает следующий вид:

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{v} + g \nabla H = g \nabla h + \frac{\nabla \varphi - \psi \nabla h}{H} + \mathbf{q}, \quad (4)$$

где  $\psi$  - дисперсионная составляющая давления на дне, для которой отдельного дифференциального уравнения не требуется, поскольку она выражается по алгебраическим формулам через величины  $\mathbf{c}$ ,  $H$ ,  $\varphi$  и  $\nabla \varphi$ .

Алгоритм расчета на произвольном шаге по времени с номером  $n$  состоит из двух шагов. На шаге предиктор сначала решается конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение для  $\varphi$ . Коэффициенты уравнения вычисляются по известным значениям  $H^n$ ,  $\mathbf{c}^n$ ,  $\mathbf{v}^n$  с  $n$ -го слоя по времени. Затем решается гиперболическая система уравнений (1), (4), при этом в правой части уравнения движения используются уже известные значения  $\varphi^n$ ,  $\psi^n$ ,  $H^n$  и  $h^n$ . После этого вновь численно решается уравнение для  $\varphi$  с использованием величин  $H^*$ ,  $\mathbf{c}^*$ ,  $\mathbf{v}^*$ , вычисленных на предикторе. Найденные на этом этапе значения  $\varphi^*$  и  $\psi^*$  используются на шаге корректор для определения окончательных значений  $H^{n+1}$  и  $\mathbf{v}^{n+1}$  путем численного решения системы уравнений гиперболического типа, состоящей из уравнения неразрывности (1) и уравнения движения (4), левая часть которого записана в дивергентной форме:

$$(\mathbf{H}\mathbf{v})_t + \nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{c} \otimes \mathbf{v}) + g \nabla \frac{H^2}{2} = gH \nabla h + \nabla \varphi - \psi \nabla h + H\mathbf{q}.$$

Поскольку структура полученных нами приближенных моделей Буссинеска на сфере идентична структуре уравнений полной НЛД-модели на сфере, то алгоритмы численного решения в рамках этих моделей также аналогичны. Более того, алгоритм решения задачи для бездисперсионных уравнений мелкой воды также укладывается в предлагаемую схему, из которой исключаются этапы расчета дисперсионной составляющей давления  $\varphi$ . Таким образом, численные алгоритмы расчета на основе всей рассматриваемой иерархии моделей мелкой воды на сфере могут быть реализованы в едином программном комплексе, ядром которого является вычислительный модуль схемы предиктор-корректор. Работы по созданию этого комплекса будут завершены на следующем этапе выполнения проекта.

Другое направление исследований, запланированных к исполнению в 2013 году, связано с изучением оползневой механизма генерации поверхностных волн. На этапе 2012 года были получены новые уравнения движения подводного оползня и для случая «одномерного» склона было выполнено численное моделирование генерируемых поверхностных волн в рамках одномерной модели мелкой воды первого приближения, одномерных НЛД-моделей и модели потенциальных плоскопараллельных течений

жидкости со свободной границе Результаты исследований отражены в статье (Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90). В 2013 году аналогичная работа выполнена для «трехмерных» водоемов. При этом исследовались поверхностные волны, возникающие при движении модельного оползня пространственно неоднородной формы по склону модельного водоема с пространственно неоднородной формой дна (см. рис. 1).

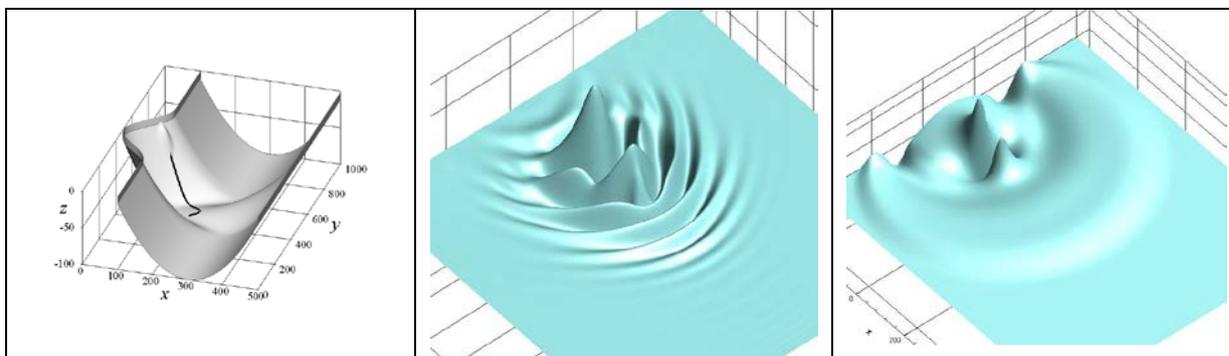


Рис.1. Траектория движения оползня пространственной формы по неровному дну модельного водоема (слева) и фрагменты графиков свободной поверхности, полученные в расчете по НЛД-модели (в центре) и по плановой модели мелкой воды (справа)

С использованием разработанных алгоритмов для плановых нелинейно-дисперсионных моделей изучено влияние дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в ограниченных водохранилищах. Выполнено сравнение с численными результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды и модели трехмерных потенциальных течений. Показано, что при использовании модели потенциальных течений и НЛД-моделей возникают системы диспергирующих волн, а модель мелкой воды дает более простую волновую картину.

По результатам вычислительных экспериментов исследовано влияние параметров, определяющих геометрию водоема и движение квазидеформируемого оползня, на величины максимальных заплесков на берег. При этом варьировались начальное заглубление оползня, его размеры и плотность, коэффициенты присоединенной массы, трения и гидродинамического сопротивления, крутизна и кривизна модельных склонов. В этих экспериментах варьировались значения какой-либо пары параметров, значения остальных фиксировались и брались равными некоторым базовым значениям. Результаты численного моделирования подтвердили гипотезу о том, что наибольшую опасность для береговых сооружений представляют волны, генерируемые оползнями с большой массой и малым начальным заглублением.

В отчетный период был в некоторой степени реализован подход, предусматривающий использование в расчетах криволинейных сеток. В настоящее время алгоритм расчета в рамках бездисперсионной модели мелкой воды реализован для адаптивных сеток, сгущающихся в окрестности оползня и отслеживающих его движение (см. рис. 2). Для построения таких сеток использовался модифицированный метод эквираспределения, ориентированный на нестационарные задачи. Алгоритм расчета на основе модели трехмерных потенциальных течений жидкости основан на применении криволинейных сеток, адаптирующихся к неподвижной криволинейной стенке, которой заменяется береговая линия, и к подвижной свободной границе. Алгоритмы расчета на основе НЛД-моделей реализованы пока для простейших расчетных сеток, генерируемых алгебраическим методом трансфинитной интерполяции. На следующем этапе выполнения проекта предполагается обобщить НЛД- алгоритмы для произвольных криволинейных сеток.

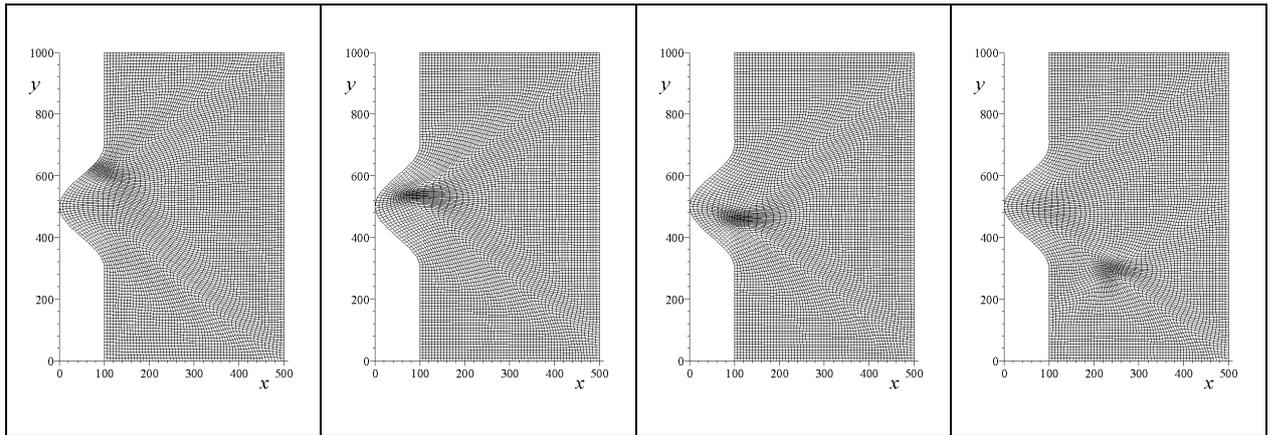


Рис. 2. Квазиортогональная подвижная сетка в последовательные моменты времени, адаптирующаяся к движущемуся оползню в расчетах по модели мелкой воды

В 2013 году выполнено также сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными. Поскольку для криволинейных откосов таких экспериментов не проводилось, то выполнялось сравнение с известными лабораторными данными о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу (см. рис. 3, 4). Мареограммы, представленные на рис. 4, показывают, что НЛД-модель удовлетворительно описывает большее число волн, чем бездисперсионная модель мелкой воды, в частности, результаты расчетов по НЛД-модели лучше соответствуют экспериментальным данным по значениям локальных экстремумов генерируемых волн, однако со временем волны в расчетах становятся более длинными, чем в эксперименте. Заметим, что и бездисперсионные уравнения мелкой воды описывают волны, генерируемые оползнем, также с приемлемой точностью в тех случаях, когда в экспериментах получались невысокие волны большой длины.

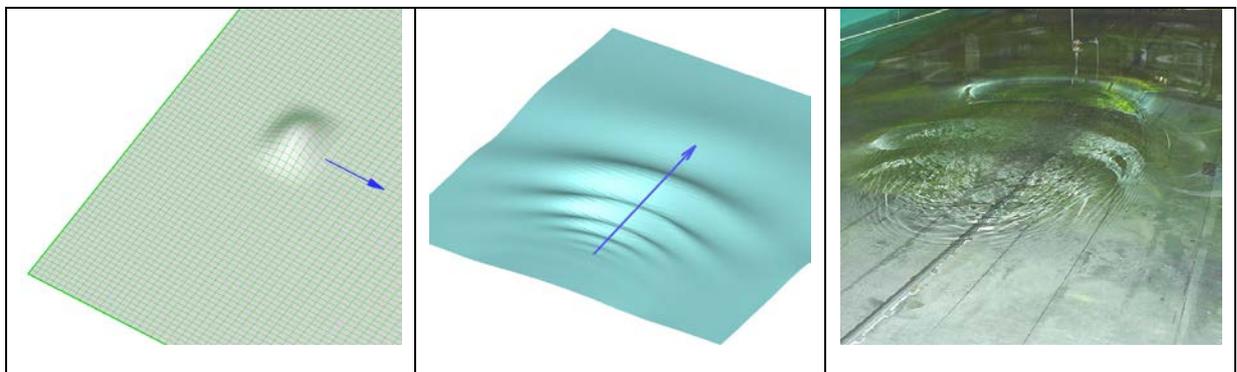


Рис. 3. Оползень пространственной формы, скользящий по плоскому откосу (слева), и генерируемые им поверхностные волны в расчете по трехмерной модели жидкости (в центре) и в эксперименте Enet F., Grilli S.T., 2007 (справа).

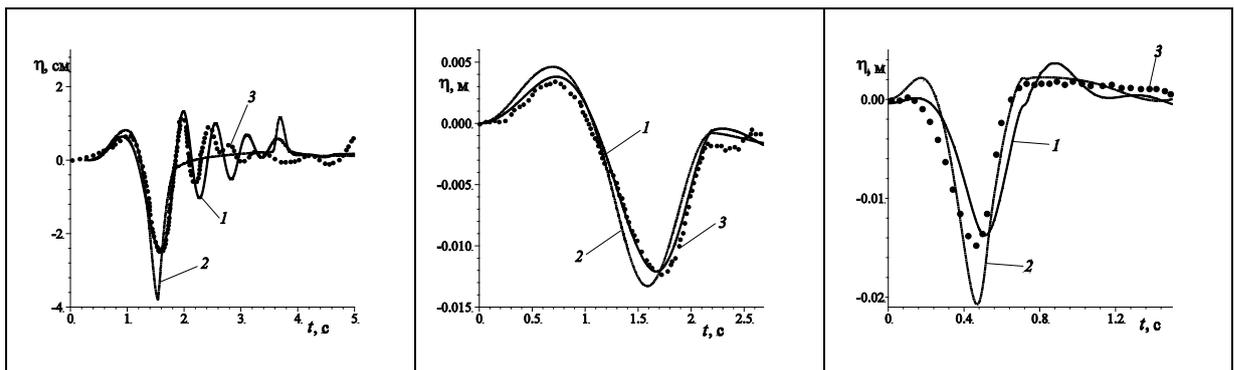


Рис. 4. Мареограммы, полученные в расчетах по НЛД-модели (1), модели мелкой воды (2) и в лабораторных экспериментах (3) Елецкий С.В., Майоров Ю.Б., Максимов В.В. и др., 2004 (слева), Grilli S.T., Watts P., 2005 (в центре) и Enet F., Grilli S.T., 2007 (справа)

Результаты этого направления исследований частично отражены в упомянутых выше публикациях участников проекта, а также в трудах Международной конференции (Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А. *Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище // Доклады Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.)*, 8 стр. – Режим доступа: [http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov\\_MIT2013.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov_MIT2013.pdf) ). Готовится статья с более полным изложением полученных результатов.

Третье направление исследований, предусмотренное общим планом работ по проекту, связано с задачами наката волн на берег. Это направление интенсивно развивается во всем мире, о чем свидетельствует неуклонный рост публикаций в журналах и трудах конференций, посвященных задачам наката. Однако проблема адекватного описания волны цунами в зоне заплеска и надежного определения границ затопления суши методами численного моделирования остается до сих пор нерешенной, хотя подходов к оценке зон затопления предложено уже немало.

В настоящее время наибольшее распространение для расчета зон затопления при выходе волны цунами на берег получили конечно-разностные и конечно-элементные методы сквозного счета. В ряде работ линия уреза заменялась вертикальной стенкой, установленной на некоторой глубине, и по вертикальным заплескам на нее приближенно определялся горизонтальный проход волны на сушу. В последнее время выросло число работ, в которых используется методика разделения области распространения цунами на две части: вдали от берега используется метод конечных элементов или метод конечных объемов на грубых сетках, а в ближней зоне, зоне прибрежной полосы, используются те же методы, но на детальной, измельченной сетке. Появились работы, в которых активно прорабатывается методика, согласно которой распространение волны цунами вдали от берега моделируется численно, а накат считается по приближенным аналитическим формулам, полученным для плоского откоса.

В отчетный период был разработан комбинированный метод численного моделирования наката волн цунами на побережье, основанный на использовании модели мелкой воды в двух приближениях: одномерном и двумерном. Вначале по двумерной модели с отражающим краевым условием на берегу рассчитывается распространение волны от источника землетрясения к побережью. Во время расчета ведется непрерывная запись параметров волн на изобате, расположенной на удалении от берега, достаточном для минимизации влияния отраженных волн на форму главной части падающей волны. Эти данные берутся затем в качестве краевых условий для одномерных расчетов вдоль сечений (см. рис. 5), проведенных от этой изобаты в сторону берега. Таким образом, в отличие от одного из известных подходов, «одномерный» накат определяется нами не по аналитическим формулам, а численно. На основе таких одномерных расчетов вычисляются значения вертикального наката (высоты) и горизонтального заплеска (дальности) вдоль выбранных сечений. Разработана процедура восстановления границы затопления суши (см. рис. 5) по результатам решения одномерных задач, использующая подробный цифровой рельеф суши.

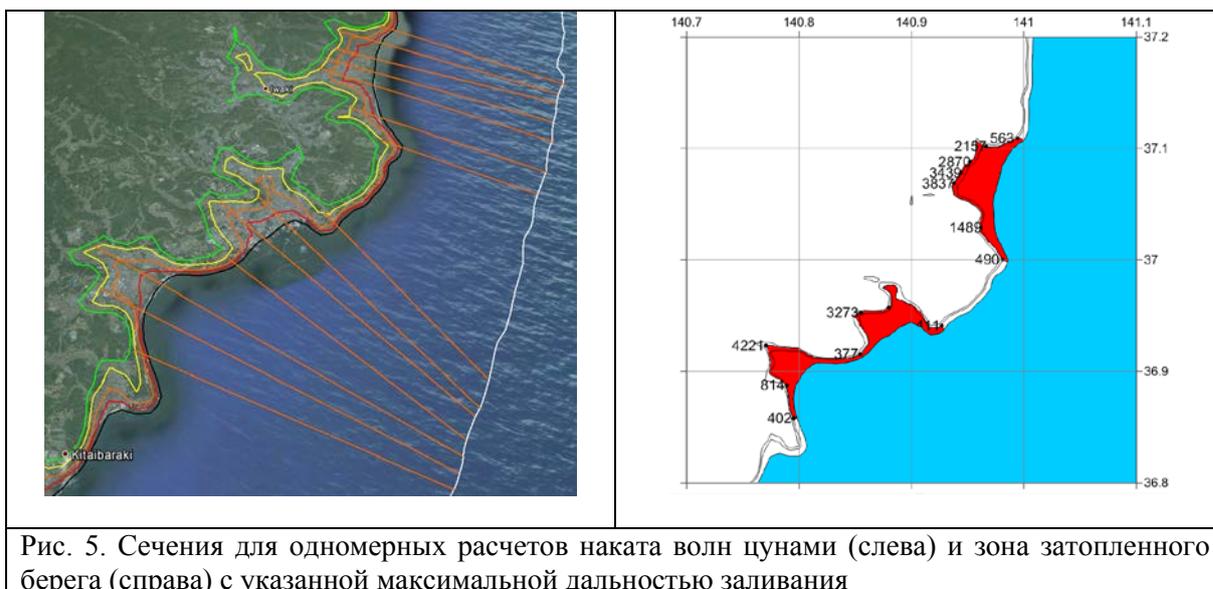


Рис. 5. Сечения для одномерных расчетов наката волн цунами (слева) и зона затопленного берега (справа) с указанной максимальной дальностью заливания

Для расчета наката в одномерных сечениях использовались два метода: модифицированный метод сквозного счета, описанный в отчете 2012 года, и метод с выделением линии разрыва (метод адаптивных сеток), в котором численное моделирование движения точки уреза выполнялось на основе полученного аналитически закона движения этой точки (*Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26, No. 4. P. 353-377.*)

Предварительно было выполнено сравнение этих методов на задачах наката уединенной волны на плоский откос и криволинейный. Для плоского откоса результаты расчетов сравнивались также с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными. Сравнение численных результатов с аналитическими решениями в той области параметров, в которой эти решения справедливы, показало, что численные результаты хорошо согласуются с точными решениями. Анализ результатов расчетов для углов наклона плоского откоса и амплитуд набегающей волны, для которых аналитических решений не существует, показало, что метод адаптивных сеток дает бо́льшие значения вертикального заплеска по сравнению с методом сквозного счета.

Интересной особенностью взаимодействия уединенной волны с пологими откосами является колебательный характер процесса наката-отката с затухающей амплитудой колебаний (см. рис. 6). Для криволинейного откоса (сплошные линии на левом рис. 6) наблюдаются колебания большей амплитуды, большего периода и медленнее затухающие, чем для аппроксимирующего его плоского откоса (штриховые линии на левом рис. 6). С увеличением крутизны откосов колебательный характер движения точки уреза практически исчезает и в процессе взаимодействия волны с берегом образуется только одна отраженная волна. Однако на криволинейном склоне колебания точки уреза наблюдаются для больших значений углов наклона, чем на аппроксимирующем его плоском откосе.

По результатам вычислительных экспериментов установлено, что в задачах наката замена криволинейного откоса на плоский может привести к большим погрешностям при определении зоны затопления. Хотя отличия по высотам заплесков могут быть небольшими, тем не менее, дальности заливания могут отличаться в разы, что связано с тем, что, в отличие от плоского откоса, в случае криволинейного волна продвигается по склону, выполаживающемуся по мере удаления от берега, и поэтому она проходит по суше большее расстояние (по горизонтали), чем в случае плоского откоса. Сильно различаются также картины взаимодействия волны с берегом. На рис. 6 показана динамика свободной

поверхности при накате уединенной волны на криволинейный откос и заменяющий его плоский склон. Видно, что в том и в другом случаях скорость волны замедляется при приближении к берегу. После наката волны на плоский откос, она скатывается с него с образованием основной отраженной волны. Для криволинейного же склона отраженная волна возникает в момент времени, когда на суше еще продолжается накат, и во время пребывания воды на пологом криволинейном склоне возникает несколько отраженных волн, чего не наблюдалось для плоских откосов.

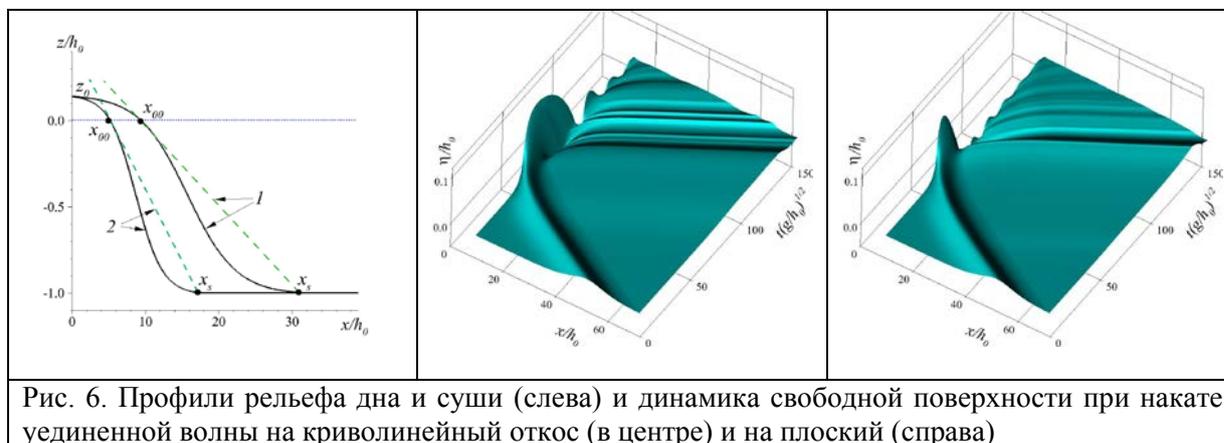


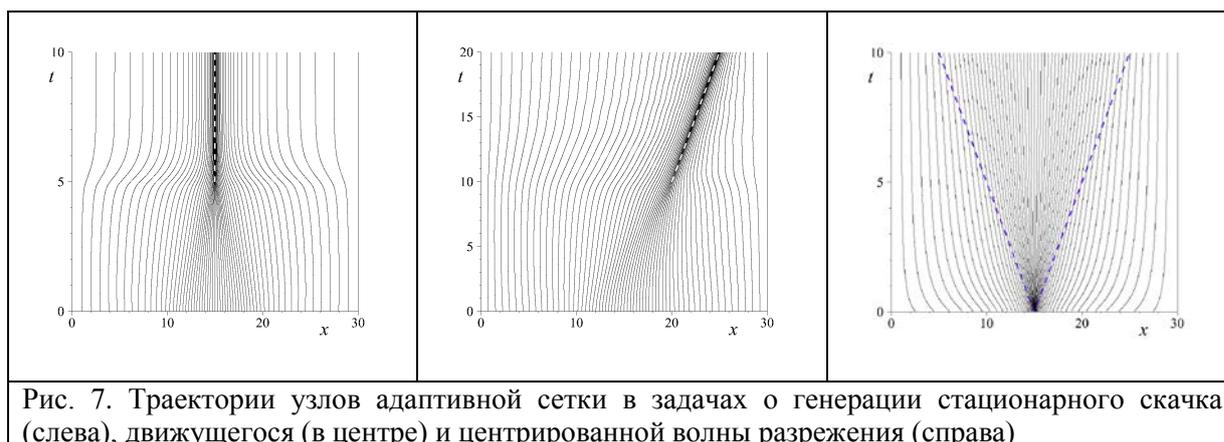
Рис. 6. Профили рельефа дна и суши (слева) и динамика свободной поверхности при накате уединенной волны на криволинейный откос (в центре) и на плоский (справа)

Разработанная методика применялась для расчета зон затопления многих участков побережья и показала удовлетворительное согласование численных результатов с данными натурных наблюдений. На следующем этапе выполнения проекта предполагается усовершенствовать методику расчета наката, заменив моделирование вдоль одномерных сечений на двумерное моделирование с помощью схемы сквозного счета и метода адаптивных сеток. Это позволит точнее учесть эффекты, связанные с косым или касательным подходом волны к берегу.

Результаты этого направления исследований изложены в принятой в печать статье (Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. *О некоторых численных алгоритмах для расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I.* // *Вычисл. технологии.* 2014. Т. 19, № 1. (принята в печать)), а также доложены на Международной конференции (Shokin Y., Beisel S., Rychkov A.D., Khakimzyanov G.S., Chubarov L. *The study of tsunami runup on the east coast of Japan by numerical simulation* // *Тезисы докладов в Справочнике Международной конференции «Математические и информационные технологии»* (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.). Белград, 2013. С. 132-133).

Метод адаптивных сеток, использовавшийся для расчета наката в одномерных сечениях, основан на явной схеме предиктор-корректор. В отчетный период была проделана очень большая работа по исследованию и усовершенствованию этой схемы на динамически адаптивных сетках. В частности, для нелинейного скалярного уравнения выписана дивергентная схема предиктор-корректор, сохраняющая монотонность численного решения на адаптивных сетках. Предложен новый подход для получения других явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках, например, противопоточной схемы, основанный на выборе схемного параметра схемы предиктор-корректор по формуле, соответствующей конкретной схеме. С помощью метода дифференциального приближения дано новое объяснение механизма возникновения нефизических численных решений в задаче Римана с точным решением в виде волны разрежения, причиной появления которых оказалась отрицательная аппроксимационная вязкость в зоне волны разрежения. Предложена новая процедура энтропийной коррекции разностной схемы, основанная на анализе ее первого дифференциального приближения. Приведен пример TVD-схемы, которая может увеличивать количество экстремумов

численного решения при переходе с одного шага по времени на другой. Последний факт является особенно важным, поскольку в некоторых статьях при перечислении положительных качеств TVD-схем встречается ошибочное утверждение о том, что при использовании TVD-схем количество экстремумов не возрастает. Установлено, что предложенная схема предиктор-корректор количество экстремумов не увеличивает. Исследованы свойства сохранения схемой предиктор-корректор постоянного решения и разрывных решений задачи Римана в виде стационарного скачка на неподвижной сетке и движущегося скачка на подвижной сетке (см. рис. 7). На примере численного решения задачи о разрушении плотины продемонстрированы преимущества использования подвижных адаптивных сеток и предложенной энтропийной коррекции схемы.



Результаты методических исследований, выполненных нами для одномерных уравнений мелкой воды, имеют общий характер, и могут использоваться при применении схемы предиктор-корректор на адаптивных сетках для численного решения двумерных задач наката. Результаты изложены в публикации (Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. *Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 54-79*) и доложены на Международной конференции (Шокина Н.Ю. *О некоторых проблемах конструирования разностных схем на подвижных сетках // Доклады Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.), 9 стр. – Режим доступа: [http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina\\_MIT2013.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina_MIT2013.pdf)*).

### 3.8. Степень новизны полученных результатов

Все перечисленные выше важнейшие результаты являются новыми и получены впервые. Вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики на вращающейся сфере впервые выполнен без предположения о потенциальности исходного трехмерного течения. Впервые получены слабо дисперсионные нелинейные модели типа Буссинеска на сфере, описывающие течения жидкости над неровным подвижным дном и обладающие законом изменения полной энергии. Впервые разработан единый для всех полученных на сфере НЛД-моделей численный алгоритм, основанный на расщеплении систем нелинейно-дисперсионных уравнений на равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления и гиперболическую систему уравнений мелкой воды первого приближения с модифицированным источниковым членом в правой части уравнений импульса.

Новыми являются результаты исследования поверхностных волн, вызванных оползнем пространственно неоднородной формы в «трехмерном» модельном водоеме, а также результаты моделирования наката волн на модельные и реальные участки побережья.

### 3.9. Сопоставление полученных результатов с мировым уровнем:

Все полученные результаты соответствуют мировому уровню исследований в данной области, а в направлении разработки нелинейно-дисперсионных моделей на сфере опережают мировой уровень.

3.10 *Количество научных работ, опубликованных в ходе выполнения проекта:*

8

*Из них включенных в перечень ВАК:*

2

*Из них включенных в системы цитирования (Web of science, Scopus, Web of Knowledge, Astrophysics, PubMed, Mathematics, Chemical Abstracts, Springer, Agris, GeoRef):*

0

*Количество научных работ, подготовленных в ходе выполнения проекта и принятых к печати в 2013 г.*

4

*Адреса ресурсов в Internet, подготовленных авторами по данному проекту*

[http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov\\_MIT2013.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov_MIT2013.pdf)

<http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146812/151531/Paper-MIT-2013.pdf>

[http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina\\_MIT2013.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina_MIT2013.pdf)

*Библиографический список всех публикаций по проекту за весь период выполнения проекта, предшествующий данному отчету, в порядке значимости: монографии, статьи в научных изданиях, тезисы докладов и материалы съездов, конференций и т.д.*

1. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558.
2. Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690-699.
3. Shokina N.Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 603-626.
4. Гусев О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 46-64.
5. Соммер А.Ф., Шокина Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на двумерных подвижных сетках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 4. С. 88-108.
6. Федотова З.И., Хахимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94-108.
7. Хахимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 78-98.
8. Хахимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Оценка высот волн, вызванных подводным оползнем в ограниченном водоеме // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 67-78.
9. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хахимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90.
10. Хахимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 54-79.
11. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3. (принята в печать)
12. Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хахимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А.,

Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах для расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 1. (принята в печать)

13. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Новый вывод нелинейно-дисперсионной модели на вращающейся сфере и законы сохранения // ПМТФ. 2014. Т. 55. (принята в печать)

14. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Шокина Н.Ю. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. (принята в печать)

15. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Использование дифференциального приближения схемы для ее монотонизации // In: Zbornic radova konferencije MIT 2011. Beograd, 2012. pp. 143-148.

16. Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А. Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище // Тезисы докладов в Справочнике Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.). Белград, 2013. С. 99-100.

17. Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А. Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище // Доклады Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.), 8 стр. – Режим доступа: [http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov\\_MIT2013.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov_MIT2013.pdf)

18. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные модели на вращающейся сфере: новый вывод и законы сохранения // Доклады Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.), 8 стр. – Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146812/151531/Paper-MIT-2013.pdf>

19. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Nonlinear–dispersive models on a rotating sphere: the new derivation and conservative laws // Тезисы докладов в Справочнике Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.). Белград, 2013. С. 84.

20. Shokin Y., Beisel S., Rychkov A.D., Khakimzyanov G.S., Chubarov L. The study of tsunami runup on the east coast of Japan by numerical simulation // Тезисы докладов в Справочнике Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.). Белград, 2013. С. 132-133.

21. Шокина Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на подвижных сетках // Доклады Международной конференции «Математические и информационные технологии» (Врнячка Баня, Сербия, 05–09 сентября 2013 г.; Будва, Черногория, 10–14 сентября 2013 г.), 9 стр. – Режим доступа: [http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina\\_MIT2013.pdf](http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina_MIT2013.pdf)

3.11 *Участие в научных мероприятиях по тематике проекта, которые проводились при финансовой поддержке Фонда*

1

3.12 *Участие в экспедициях по тематике проекта, проводимых при финансовой поддержке Фонда*

3.13 *Финансовые средства, полученные от РФФИ*  
310000 руб.

3.14 *Приоритетное направление развития науки, технологий и техники РФ, которому, по*

*мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*

#### 6 - Рациональное природопользование

3.15 *Критическая технология РФ, в которой, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*

19 - Технологии мониторинга и прогнозирования состояния окружающей среды, предотвращения и ликвидации ее загрязнения

3.16 *Основное направление технологической модернизации экономики России, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*  
не очевидно

#### **Форма 509. Список публикаций 2013 г. со ссылками на проект**

1. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3. (*принята в печать, ISSN 1569-3988; DE GRUYTER; 20 ссылок*)

Дан новый вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики без предположения о потенциальности течения. Кроме полностью нелинейных НЛД-уравнений, выведены приближенные слабо нелинейные уравнения типа Буссинеска, сохраняющие основные свойства полных НЛД-уравнений. Речь идет о законах сохранения массы, импульса, полной энергии – тех свойствах, которые в первую очередь присущи трехмерным уравнениям гидродинамики и могут быть утеряны при их упрощении. Показано, что для всех полученных НЛД-моделей выполняется баланс полной энергии. Полученные НЛД-уравнения могут применяться при численном моделировании распространения длинных волн в акваториях, в частности, для случаев, связанных с изменением дна (оползни). Наличие у полученных НЛД-моделей свойств, связанных с законами сохранения, позволяет осуществлять контроль точности численных алгоритмов.

2. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И., Хакимянов Г.С., Чубаров Л.Б., Шокина Н.Ю. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. (*принята в печать, ISSN 2071-0216; 22ссылки*)

Особенность моделирования поверхностных волн, порожденных движением подводного оползня, определяется тем, что эти волны зарождаются в прибрежной зоне с малой глубиной, меньшей, чем длины генерируемых волн, поэтому приемлемое описание исследуемых волновых режимов, особенно в начальной стадии процесса, может дать модель мелкой воды. Нелинейно-дисперсионные (НЛД-) модели лучше воспроизводят волновую картину, чем классические (бездисперсионные) уравнения мелкой воды, поскольку в НЛД-уравнениях гидродинамики учитывается дисперсия волн и в некоторой степени неоднородность процесса в вертикальном направлении. В настоящей работе используется полная НЛД-модель, выведенная (Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. RJNAMM. 2014 (*в печати*)) из уравнений Эйлера с учетом подвижности дна и без предположений о малости амплитуды и о потенциальности исходного трехмерного течения несжимаемой жидкости со свободной границей. Предлагается метод расщепления, сводящий сложную задачу для НЛД-уравнений к двум более простым: к системе уравнений гиперболического типа и к скалярному уравнению эллиптического типа для осредненной по глубине дисперсионной составляющей давления. Приведены некоторые результаты расчетов с использованием НЛД-модели, которые сравниваются с результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды, а также с известными лабораторными данными о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу.

3. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90. (*ISSN 1560-7534; 32 ссылки*)

Исследуется влияние дисперсии на картину поверхностных волн, возникающих при сходе подводного оползня в ограниченном водоеме. Для описания поверхностных волн используются как полная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды, так и новые приближенные модели типа Буссинеска (*Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. RJNAMM. 2014 (в печати)*) для волн, генерируемых оползнями малой высоты или медленно сползающими оползнями. Разработан единый для всех моделей подход к построению численных алгоритмов, основанный на аппроксимации расширенной системы уравнений, состоящей из уравнения эллиптического типа для негидростатической составляющей давления и системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды первого приближения. Показано, что учет дисперсии волн существенно влияет на волновую картину. Путем сопоставления численных результатов, полученных в рамках бездисперсионной модели мелкой воды, нелинейно-дисперсионных моделей и модели потенциальных течений со свободной границей обозначены области применимости как полной, так и приближенных НЛД-моделей.

4. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Новый вывод нелинейно-дисперсионной модели на вращающейся сфере и законы сохранения // ПМТФ. 2014. Т. 55. (*принята в печать, ISSN 0869-5032, 15 ссылок*)

В настоящей работе дан вывод нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере, не использующий условие потенциальности исходного трехмерного течения. Получены новые модели типа Буссинеска на сфере для течений над подвижным или медленно меняющимся неровным дном, причем структура уравнений этих НЛД-моделей полностью сохраняет структуру исходной НЛД-модели, что позволит применить в дальнейшем единый подход к построению численных алгоритмов для выведенных здесь полной и слабо-дисперсионных моделей на сфере.

Для каждой из НЛД-моделей получено выражение для полной энергии, вытекающее из вида полной энергии уравнений Эйлера при учете условий вывода моделей. Выписаны уравнения баланса полной энергии, являющиеся следствием полученных НЛД-уравнений и имеющие важное значение для верификации численных алгоритмов. Важным обстоятельством является согласованность уравнений баланса энергии приближенных и исходной гидродинамических моделей, выражающаяся в том, что каждое из выведенных уравнений баланса энергии получается также и из закона сохранения энергии трехмерных уравнений Эйлера на сфере при том же порядке аппроксимации, при котором соответствующая приближенная модель аппроксимирует модель трехмерных течений.

Необходимо также отметить лаконичную форму записи полученных уравнений баланса на сфере, которые в случае неподвижного дна переходят в консервативные законы сохранения, что способствует построению корректных разностных аппроксимаций для численных расчетов.

5. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 54-79. (*ISSN 1560-7534; 28 ссылок*)

Для нелинейного скалярного уравнения выписана дивергентная схема предиктор-корректор, сохраняющая монотонность численного решения на адаптивных сетках. Предложен новый подход для получения любых явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках, например, противопоточной схемы, основанный на выборе схемного параметра по формулам, связанным с каждой конкретной схемой. С помощью метода дифференциального приближения дано новое объяснение механизма возникновения нефизичных численных решений в задаче Римана, причиной появления которых оказалась отрицательная аппроксимационная вязкость в волне разрежения. Предложена новая процедура энтропийной коррекции разностной схемы, основанная на анализе ее первого дифференциального

приближения. Приведен пример TVD-схемы, которая может увеличивать количество экстремумов численного решения при переходе с одного шага по времени на другой. Установлено, что предложенная здесь схема предиктор-корректор количество экстремумов не увеличивает. Исследованы свойства сохранения схемой предиктор-корректор постоянного решения и разрывных решений задачи Римана в виде стационарного скачка на неподвижной сетке и движущегося скачка на подвижной сетке. Результаты обобщены на случай одномерных уравнений мелкой воды. На примере численного решения задачи о разрушении плотины продемонстрированы преимущества использования подвижных адаптивных сеток и предложенной энтропийной коррекции схемы.

6. Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах для расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 1. (*принята в печать, ISSN 1560-7534; 57 ссылок*).

Представлен метод численного моделирования наката волн цунами на побережье, основанный на использовании модели мелкой воды в двух приближениях: одномерном и двумерном. Вначале по двумерной модели с отражающим краевым условием на берегу рассчитывается распространение волны от источника к побережью. Параметры течения на некоторой изобате, полученные из этого расчета, используются затем в качестве краевых условий для одномерного моделирования наката вдоль различных сечений, проведенных от этой изобаты до выбранной изолинии на суше. Выполнено сравнение трех численных методов для расчета наката вдоль сечений: сквозного счета и с выделением линии разрыва на основе классической модели мелкой воды и конечно-разностного метода, основанного на модели мелкой воды с модифицированным уравнением импульса. Описана процедура восстановления границы затопления суши по результатам решения одномерных задач. Изложенная авторами методика применялась для расчета зон затопления многих участков побережья и показала удовлетворительное согласование численных результатов с данными натуральных наблюдений Японского цунами 2011 года.