

Моделирование поверхностных волн, порождаемых подводным оползнем, движущимся по пространственно неоднородному склону*

С. А. БЕЙЗЕЛЬ, Г. С. ХАКИМЗЯНОВ, Л. Б. ЧУБАРОВ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Россия

e-mail: beisel_s@ngs.ru, khak@ict.nsc.ru, chubarov@ict.nsc.ru

Рассмотрена задача численного моделирования поверхностных волн, генерируемых движением затопленного оползня по пространственно неоднородному склону. Представлен закон движения оползня под действием сил тяжести, трения, выталкивания и гидродинамического сопротивления окружающей жидкости с учетом эффекта присоединенной массы. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов для модельной акватории.

Ключевые слова: математическое моделирование, затопленный оползень, неоднородный склон, поверхностные волны.

Введение

Первые результаты авторов и их коллег по численному исследованию оползневого механизма генерации поверхностных волн были опубликованы в 2004 г. [1, 2]. В то время работы велись главным образом в одномерном приближении. Оползень представлялся твердым телом, движущимся по однородному склону в соответствии с простыми заданными законами, в том числе, предложенными в [3]. Подход к моделированию гидродинамической компоненты процесса вначале ограничивался классическими уравнениями нелинейной мелкой воды в гидростатическом приближении. В тот же период была опробована альтернативная модель оползня, являвшегося фрагментом упругой среды, движение которой рассчитывалось с помощью математического инструментария, представленного в работе [4].

Необходимость сопоставления результатов численного моделирования с реальными данными побудила авторов обратиться к группе исследователей из Санкт-Петербурга с предложением о проведении специальных лабораторных экспериментов. Данные совместных исследований позволили оценить полученные ранее результаты и стимулировали разработку иерархии численных моделей, основанных на приближенных уравнениях волновой гидродинамики, учитывающих не только нелинейные, но и дисперсионные эффекты с различной степенью точности. На вершине этой иерархии располагалась модель, построенная на базе полных уравнений потенциальных течений однородной

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-05-00294 и 10-05-91052-НЦНИ), программы Интеграционных исследований СО РАН (проект 116) и президентской программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-931.2008.9).

© ИВТ СО РАН, 2010.

несжимаемой идеальной жидкости. Опубликованные в работах [5, 6] результаты продемонстрировали целесообразность учета нелинейной дисперсии для моделирования цуга волн, следующих за головной частью сигнала, в то время как эта головная часть вполне приемлемо воспроизводилась даже относительно простыми приближенными гидродинамическими моделями.

Несколько позднее в одномерной и двумерной постановке были реализованы модели оползней, представлявших собой сгусток более плотной жидкости, движущейся по склону под слоем жидкости с меньшей плотностью [7]. Эти задачи решались в упрощенной расщепленной постановке, когда отдельно в рамках теории мелкой воды с помощью алгоритма схемы С.К. Годунова первого порядка аппроксимации решалась задача о движении плотной жидкости по сухому склону, а результаты ее решения использовались для определения деформации рельефа склона, порожденной перемещением оползня. Характеристики волнового режима рассчитывались также в рамках теории мелкой воды для слоя жидкости, лежащего над склоном с динамически изменяемым рельефом.

Логика дальнейших исследований с использованием модели твердого оползня привела к задачам моделирования процессов в акватории с реальным рельефом дна и с оползнем конечного размера. В свою очередь такие постановки потребовали корректного вывода законов движения оползня по пространственно неоднородному склону.

Первая попытка решения этих задач выполнена в 2009 г. и ограничена одномерным случаем. Выведенный одномерный закон движения и результаты вычислительных экспериментов с его использованием представлены в работах [8, 9]. Авторами были определены и проанализированы специфические особенности рассматриваемого механизма волнообразования на последовательности акваторий с модельными, в том числе криволинейными, рельефами дна.

В настоящей работе предложен переход к акваториям с пространственно неоднородным рельефом дна. При этом оползень представляется фрагментом “квазинедеформируемой” сплошной среды, движущимся по заданному закону со скоростью, горизонтальные компоненты которой одинаковы в каждой точке оползня. Движение оползня происходит под действием сил тяжести, трения, выталкивания и гидродинамического сопротивления окружающей жидкости с учетом эффекта присоединенной массы. Гидродинамика процесса рассматривается в рамках нелинейной модели мелкой воды в гидростатическом приближении. Численное моделирование поверхностных волн, генерируемых движением оползня, выполняется с использованием схемы МакКормака на равномерной сетке. Достаточно подробно излагается вывод оригинального закона движения оползня в общем случае. В заключительном разделе обсуждаются результаты вычислительных экспериментов для модельной акватории, рельеф дна которой задается аналитически. Демонстрируются особенности порождаемых волновых режимов в зависимости от начального положения оползня относительно неоднородности модельного рельефа.

1. Постановка задачи

Рассматривается слой жидкости, ограниченный сверху свободной поверхностью $z = \eta(x, y, t)$, а снизу — подвижной границей $z = -h(x, y, t) = h_{bt}(x, y) + h_{sl}(x, y, t)$. Здесь t — время, система координат $Oxyz$ выбрана так, что x, y — горизонтальные, z — вертикальная координаты, при этом плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью покоящейся

жидкости. Подвижность нижней границы слоя обусловлена тем, что по непроницаемому дну, заданному однозначной функцией

$$z = h_{bt}(x, y), \quad (1)$$

движется оползень, форма которого описывается функцией $z = h_{sl}(x, y, t)$.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ оползень и жидкость покоятся и известна неотрицательная ограниченная функция $z = h_{sl}^0(x, y)$ с конечным носителем $\mathcal{D}_0$, описывающая начальную форму оползня:

$$h_{sl}(x, y, 0) = h_{sl}^0(x, y).$$

Форма и положение оползня при $t > 0$ определяются законом его движения, выведенным ниже.

Предполагается, что жидкость находится в поле силы тяжести, является несжимаемой, невязкой и ее характеристики не зависят от вертикальной координаты z . Для моделирования возникающих при движении оползня поверхностных волн будем использовать плановую модель нелинейной теории мелкой воды, уравнения которой имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}^2}{\partial y} = \mathbf{G},$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \\ Hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x \\ gHh_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2/2 \\ Huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hv \\ Huv \\ Hv^2 + gH^2/2 \end{pmatrix},$$

u, v — компоненты вектора скорости в направлении осей Ox и Oy соответственно, $H = \eta + h$ — полная глубина, g — ускорение свободного падения.

2. Уравнения движения оползня

Далее применяется способ моделирования движения оползня, основанный на следующих предположениях:

1) при выводе закона движения оползень в каждый момент времени отождествляется с некоторой материальной точкой $\mathbf{x}_c(t) = (x_c(t), y_c(t), z_c(t))$, скользящей вдоль неровного дна (1) согласно закону движения материальной точки по заданной поверхности, при этом $x_c(0) = x_c^0, y_c(0) = y_c^0$, где $(x_c^0, y_c^0) \in \mathcal{D}_0$;

2) при $t > 0$ поверхность оползня описывается функцией

$$z = h_{bt}(x, y) + h_{sl}(x, y, t),$$

где $h_{sl}(x, y, t) = h_{sl}^0(x + x_c^0 - x_c(t), y + y_c^0 - y_c(t))$.

3) поверхность (1) не имеет особых точек и допускает регулярную параметризацию

$$x = x(q^1, q^2), \quad y = y(q^1, q^2), \quad z = z(q^1, q^2), \quad (2)$$

где q^1, q^2 — некоторые параметры. Тогда

$$x_c(t) = x(q^1(t), q^2(t)), \quad y_c(t) = y(q^1(t), q^2(t)), \quad z_c(t) = z(q^1(t), q^2(t)), \quad (3)$$

где $(q^1(t), q^2(t))$ — положение рассматриваемой точки в момент времени t в параметрическом пространстве.

Таким образом, функция $h_{sl}(x, y, t)$ является финитной и ее носитель $\mathcal{D}_t$ полностью определяется носителем функции h_{sl}^0 и положением точки $\mathbf{x}_c(t)$:

$$\mathcal{D}_t = \left\{ (x, y) \mid (x + x_c^0 - x_c(t), y + y_c^0 - y_c(t)) \in \mathcal{D}_0 \right\}.$$

Приступая к выводу уравнений движения оползня, рассмотрим уравнения несвободного движения точки $\mathbf{x}_c(t)$ по поверхности (1), которые имеют вид

$$m\ddot{x}_c = F_1, \quad m\ddot{y}_c = F_2, \quad m\ddot{z}_c = F_3, \quad (4)$$

при этом $z_c(t) = h_{bt}(x_c(t), y_c(t))$.

Из соотношений параметризации (2) вытекают выражения для декартовых компонент скорости через ее контравариантные компоненты:

$$\dot{x}_c = x_{q^1}\dot{q}^1 + x_{q^2}\dot{q}^2, \quad \dot{y}_c = y_{q^1}\dot{q}^1 + y_{q^2}\dot{q}^2, \quad \dot{z}_c = z_{q^1}\dot{q}^1 + z_{q^2}\dot{q}^2.$$

Следовательно, уравнения движения (4) можно переписать в виде

$$m \frac{d}{dt} (x_{q^1}\dot{q}^1 + x_{q^2}\dot{q}^2) = F_1, \quad m \frac{d}{dt} (y_{q^1}\dot{q}^1 + y_{q^2}\dot{q}^2) = F_2, \quad m \frac{d}{dt} (z_{q^1}\dot{q}^1 + z_{q^2}\dot{q}^2) = F_3. \quad (5)$$

Умножая каждое из уравнений (5) на соответствующую компоненту x_{q^1} , y_{q^1} или z_{q^1} вектора, касательного к параметрически заданной поверхности (2), получим первое уравнение движения:

$$m \frac{d}{dt} (g_{11}\dot{q}^1 + g_{12}\dot{q}^2) - \frac{m}{2} \left[(g_{11})_{q^1} (\dot{q}^1)^2 + 2(g_{12})_{q^1} \dot{q}^1 \dot{q}^2 + (g_{22})_{q^1} (\dot{q}^2)^2 \right] = F_{\tau_1} \sqrt{g_{11}}, \quad (6)$$

где $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — ковариантные компоненты метрического тензора поверхности:

$$g_{11} = x_{q^1}^2 + y_{q^1}^2 + z_{q^1}^2, \quad g_{12} = g_{21} = x_{q^1}x_{q^2} + y_{q^1}y_{q^2} + z_{q^1}z_{q^2}, \quad g_{22} = x_{q^2}^2 + y_{q^2}^2 + z_{q^2}^2,$$

$F_{\tau_1} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ — единичные векторы, касательные к поверхности (2):

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \left(\frac{x_{q^\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}, \frac{y_{q^\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}, \frac{z_{q^\alpha}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \right)^T, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Аналогично получается второе уравнение движения

$$m \frac{d}{dt} (g_{21}\dot{q}^1 + g_{22}\dot{q}^2) - \frac{m}{2} \left[(g_{11})_{q^2} (\dot{q}^1)^2 + 2(g_{21})_{q^2} \dot{q}^1 \dot{q}^2 + (g_{22})_{q^2} (\dot{q}^2)^2 \right] = F_{\tau_2} \sqrt{g_{22}}, \quad (8)$$

где $F_{\tau_2} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}_2$.

Приведем теперь выражения (6), (8) к виду, удобному для численного интегрирования. Пусть v_1, v_2 — ковариантные компоненты вектора скорости, $v^1 = \dot{q}^1$, $v^2 = \dot{q}^2$ — контравариантные. Тогда

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2, \quad v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2; \quad (9)$$

$$v^1 = g^{11}v_1 + g^{12}v_2, \quad v^2 = g^{21}v_1 + g^{22}v_2, \quad (10)$$

где $g^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — контравариантные компоненты метрического тензора поверхности:

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{G}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{G}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{G}, \quad G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix},$$

при этом $G \neq 0$ в силу предположения об отсутствии на поверхности особых точек.

Используя (9), (10), можно записать выражения (6), (8) в виде уравнений относительно искомых функций v_α ($\alpha = 1, 2$):

$$m \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{m}{2} \left[(g_{11})_{q^\alpha} (v^1)^2 + 2(g_{21})_{q^\alpha} v^1 v^2 + (g_{22})_{q^\alpha} (v^2)^2 \right] + F_{\tau_\alpha} \sqrt{g_{\alpha\alpha}}. \quad (11)$$

Вычислив решения v_α этих уравнений, с помощью формул (10) определим контравариантные компоненты скорости и затем, решив систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = v^\alpha, \quad (12)$$

найдем положение $(q^1(t), q^2(t))$ точки $\mathbf{x}_c(t)$ в параметрическом пространстве, а используя формулы (3), определим декартовы координаты этой точки.

При численном решении данной задачи будем предполагать, что поверхность (1) можно параметризовать с помощью декартовых координат x и y . Поэтому далее вместо параметризации общего вида будем использовать конкретную:

$$x = q^1, \quad y = q^2, \quad z = h_{bt}(x, y). \quad (13)$$

В этом случае для единичных векторов (7), касательных к поверхности (1), справедливы представления:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \left(1, 0, \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \right)^T, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left(0, 1, \frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right)^T,$$

при этом

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \right)^2, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \cdot \frac{\partial h_{bt}}{\partial y}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right)^2.$$

Обозначим через r_α правые части уравнений (11) и применим для решения системы (11), (12) схему Эйлера. На первом этапе вычислительного алгоритма решаются уравнения

$$m \frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{\tau} = r_1^n, \quad m \frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{\tau} = r_2^n. \quad (14)$$

Поскольку в момент времени $t = 0$ оползень находился в состоянии покоя, то начальными условиями для системы (14) будут следующие:

$$v_1^0 = v_2^0 = 0.$$

В условиях выбранной параметризации (13) контравариантные компоненты v^α вектора скорости совпадают с декартовыми компонентами u и v , которые находятся по формулам (10) с использованием смешанной аппроксимации

$$u^{n+1} = g^{11,n} v_1^{n+1} + g^{12,n} v_2^{n+1}, \quad v^{n+1} = g^{21,n} v_1^{n+1} + g^{22,n} v_2^{n+1}.$$

Уравнения (12) аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{x_c^{n+1} - x_c^n}{\tau} = u^{n+1}, \quad \frac{y_c^{n+1} - y_c^n}{\tau} = v^{n+1},$$

где x_c^0 и y_c^0 — известные абсцисса и ордината точки $\mathbf{x}_c(t)$ в начальный момент времени. Третья координата определяется из условия о том, что эта точка движется по поверхности (1):

$$z_c^{n+1} = h_{bt}(x_c^{n+1}, y_c^{n+1}).$$

Поясним теперь, чему равны входящие в уравнения движения величины m и F_{τ_α} . В качестве величины m будем брать суммарную массу оползня M и присоединенную массу воды $C_w \rho_w V$, т. е. $m = (\rho_{sl} + C_w \rho_w) V$, где ρ_w — плотность воды, ρ_{sl} — плотность оползня, C_w — коэффициент присоединенной массы, V — объем оползня.

Возьмем далее произвольную точку $(x, y) \in \mathcal{D}_t$. В вертикальном направлении на каждый элементарный объем оползня с площадью сечения $dxdy$ действуют силы тяжести и плавучести (выталкивающая сила воды):

$$\mathbf{f}_g(x, y) = (0, 0, f(x, y)), \quad (15)$$

где

$$f(x, y) = -g(\rho_{sl} - \rho_w) h_{sl}(x, y, t) dxdy. \quad (16)$$

Вычислим проекции силы $\mathbf{f}_g$ на направления базисных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$:

$$f_{g,\tau_1} = \mathbf{f}_g \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = \frac{f}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial x}, \quad f_{g,\tau_2} = \mathbf{f}_g \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{f}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial y},$$

и проинтегрируем эти проекции по всему носителю $\mathcal{D}_t$ функции h_{sl} :

$$F_{g,\tau_\alpha}(t) = \iint_{\mathcal{D}_t} f_{g,\tau_\alpha}(x, y, t) dxdy, \quad \alpha = 1, 2. \quad (17)$$

Полученные силы определяют вклад в компоненты F_{τ_α} сил тяжести и плавучести. Сила (17) заставляет оползень ускоряться. Замедлению движения способствуют сопротивление воды и трение оползня о дно. Сила сопротивления воды направлена против движения оползня параллельно вектору скорости, который лежит в касательной плоскости, а ее величина f_r пропорциональна наибольшей площади Π сечения оползня вертикальной плоскостью, трансверсальной направлению вектора $(u, v, 0)$:

$$f_r = \frac{1}{2} C_d \rho_w \Pi v_c^2,$$

где C_d — коэффициент сопротивления воды, v_c — модуль вектора скорости $\mathbf{v}_c(t)$ движения точки $\mathbf{x}_c(t)$:

$$v_c^2 = |\mathbf{v}_c|^2 = uv_1 + vv_2.$$

Отметим, что сила сопротивления является пассивной, т. е. при отсутствии движения она исчезает. Пусть движение имеет место, т. е. $v_c \neq 0$. Тогда сила сопротивления определяется формулой

$$\mathbf{F}_r = -\frac{\mathbf{v}_c}{v_c} f_r,$$

поэтому для проекций этой силы на направления векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ будем иметь следующие выражения:

$$F_{r,\tau_\alpha} = \mathbf{F}_r \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha = -\frac{f_r}{v_c \sqrt{g_{\alpha\alpha}}} v_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{C_d \rho_w \Pi}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} v_c v_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Еще одной силой, тормозящей движение оползня, является сила трения, вектор которой лежит в касательной плоскости, параллелен вектору скорости и имеет направление, обратное движению оползня.

Снова рассмотрим элементарный объем оползня с площадью сечения $dxdy$. Для него силу трения будем определять по нормальной реакции N , действующей на выделенный элемент со стороны дна. Вычислим величину N . Уравнения (5) при использовании параметризации (13) запишутся как

$$m \frac{du}{dt} = F_1, \quad m \frac{dv}{dt} = F_2, \quad m \frac{d}{dt} \left(u \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} + v \frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right) = F_3.$$

Умножим первые две формулы соответственно на $-\partial h_{bt}/\partial x$ и $-\partial h_{bt}/\partial y$ и сложим полученные выражения с третьим:

$$-m \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \frac{du}{dt} - m \frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \frac{dv}{dt} + m \frac{d}{dt} \left(u \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} + v \frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right) = F_n \sqrt{G}, \quad (19)$$

где $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности (1):

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T, \quad n_1 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial x}, \quad n_2 = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial y}, \quad n_3 = \frac{1}{\sqrt{G}}, \quad (20)$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial h_{bt}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right)^2.$$

После простых преобразований формула (19) принимает вид

$$\frac{m}{\sqrt{G}} \left(u^2 \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial y^2} \right) = F_n. \quad (21)$$

Для элементарного объема оползня величина F_n складывается из нормальной составляющей $\mathbf{f}_g \cdot \mathbf{n}$ силы (15) и нормальной реакции N , действующей на этот объем. Величина силы трения определяется как $f_{fr} = C_{fr} N$, где C_{fr} — коэффициент трения скольжения. Будем считать, что присоединенная масса воды скользит по дну без трения. Тогда из формул (21), (15), (16) и (20) получим выражение

$$f_{fr} = -\frac{C_{fr} f}{\sqrt{G}} \left[1 + \frac{1}{g} \left(u^2 \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial x^2} + 2uv \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 h_{bt}}{\partial y^2} \right) \right]. \quad (22)$$

Вектор силы трения, действующей в момент времени t на весь оползень, определим по формуле

$$\mathbf{F}_{fr}(t) = -\frac{\mathbf{v}_c}{v_c} \iint_{\mathcal{D}_t} f_{fr}(x, y, t) dxdy.$$

Отметим, что при вычислении интеграла в качестве величин u и v , входящих в выражение (22), берутся две первые компоненты вектора $\mathbf{v}_c$. При $v_c = 0$ полагаем $\mathbf{F}_{fr} = 0$.

Зная силу $\mathbf{F}_{fr}$, можно определить ее проекции на направления базисных векторов $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$:

$$F_{fr,\tau_\alpha} = \mathbf{F}_{fr} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (23)$$

Суммы компонент (17), (18), (23) и принимаются за величины F_{τ_α} , входящие в правые части уравнений (11):

$$F_{\tau_\alpha} = F_{g,\tau_\alpha} + F_{r,\tau_\alpha} + F_{fr,\tau_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Решение задачи определения закона движения оползня ищется до момента остановки оползня, т. е. до такого момента времени t_* , при котором впервые значение v_c скорости оползня обратится с заданной точностью в нуль. Отметим, что если оползень, пройдя низшую точку дна и поднявшись по инерции на некоторую высоту противоположного склона, остановился на нем, то при малом коэффициенте трения может возникнуть обратное движение: соскальзывание оползня назад в более глубокую часть акватории. Поэтому в каждый момент остановки необходимо проверять критерий возможности дальнейшего движения

$$\left| \iint_{\mathcal{D}_{t_*}} h_{sl}(x, y, t_*) \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial h_{bt}}{\partial y} \right) dx dy \right| - C_{fr} \iint_{\mathcal{D}_{t_*}} h_{sl}(x, y, t_*) \frac{1}{\sqrt{G}} dx dy > 0, \quad (24)$$

который означает, что касательная составляющая равнодействующей сил тяжести и плавуности больше силы трения. Условие (24) необходимо проверять и в начальный момент времени. Если оно не выполняется, то оползень не сдвинется с места.

3. Модельная акватория и модельный оползень

В контексте настоящей статьи, основное назначение которой состоит в представлении нового закона движения оползня и возможностей его использования в исследованиях оползневого механизма волнообразования в условиях реальных акваторий, достаточно представительными, на наш взгляд, являются результаты моделирования порождаемых волновых режимов в акватории с модельным рельефом (рис. 1), обладающим ненулевой кривизной и задаваемым с помощью гладкой функции

$$z = h_{bt}(x, y) = \frac{h_+ + h_-}{2} + \frac{h_+ - h_-}{2} \tanh \left[c(y) \left(x - \xi(y) \right) \right],$$

$$x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y], \quad (25)$$

где h_+ , h_- — глубина дна соответственно в правой и левой бесконечно удаленной точке,

$$c(y) = \frac{2 \tan \theta(y)}{h_- - h_+}, \quad \xi(y) = \frac{1}{2c(y)} \ln \frac{h_0 - h_+}{h_- - h_0},$$

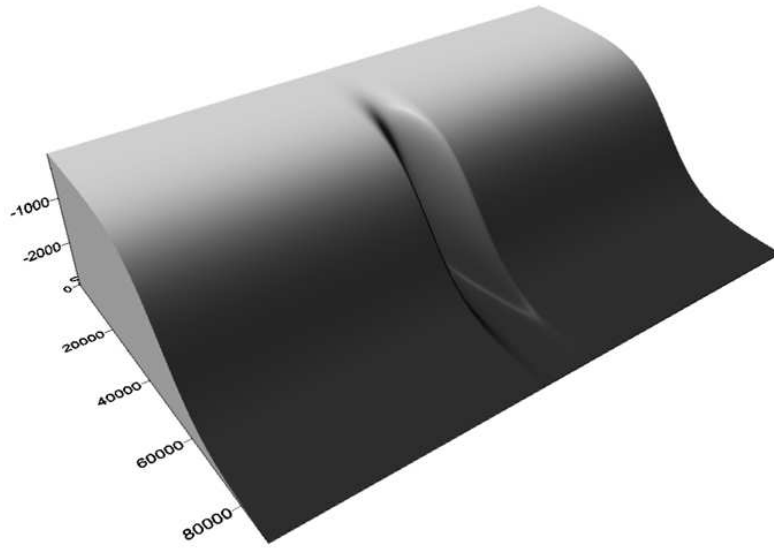


Рис. 1. Рельеф модельной акватории

h_0 — глубина на левой границе $x = 0$. Положительная величина $\theta(y)$ равна максимальному углу наклона плоской кривой, получающейся в результате сечения поверхности (25) плоскостью $y = \text{const}$. Этот максимальный угол достигается в точке перегиба $\xi(y)$ указанной кривой. Функция $\theta(y)$ задавалась по формуле

$$\theta(y) = C^{os}(y; \theta_1, \theta_2, y_\theta, \delta_\theta),$$

где $0 < \theta_1 < \theta_2$, $y_\theta \in (0, L_y)$, $\delta_\theta > 0$ и использовано обозначение

$$C^{os}(q; p_1, p_2, q_0, \delta) = \begin{cases} p_1 + \frac{p_2 - p_1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi(q - q_0)}{\delta}\right) \right], & |q - q_0| \leq \delta/2, \\ p_1, & |q - q_0| > \delta/2. \end{cases}$$

Начальная форма модельного оползня задавалась по формуле

$$h_{sl}^0(x, y) = T \cdot C^{os}(x; 0, 1, x_c^0, b_x) \cdot C^{os}(y; 0, 1, y_c^0, b_y),$$

где x_c^0, y_c^0 — заданные абсцисса и ордината вершины оползня при $t = 0$, T — толщина оползня, b_x, b_y — его длины соответственно вдоль осей Ox и Oy .

В расчетах использовались следующие значения параметров: $C_w = C_d = 1$, $C_{fr} = \tan 1^\circ$, безразмерная плотность воды $\rho_w = 1$, $\rho_{sl} = 1.5$, $h_- = -48$ м, $h_0 = -50$ м, $h_+ = -3000$ м, $\theta_1 = 6^\circ$, $\theta_2 = 9^\circ$, $L_x = 70000$ м, $L_y = 140000$ м, $y_\theta = L_y/2$, $\delta_\theta = 0.1L_y$, $b_x = b_y = 10000$ м. На “береговой линии” — левой границе области — ставилось условие непротекания, на остальных трех границах — условие свободного прохода.

4. Результаты расчетов

Для демонстрации зависимости волнового режима от начального положения оползня относительно особенности подводного рельефа рассматривались два случая: в первом оползень располагался в момент времени $t = 0$ по центру желоба ($x_c^0 = 22800$ м, $y_c^0 = 70000$ м), во втором — сбоку ($x_c^0 = 30000$ м, $y_c^0 = 74500$ м).

В первом случае траектория движения центра масс оползня очень проста (рис. 2, *а*), ускорения и скорости в направлении Oy равны нулю, а графики изменения этих характеристик во времени в направлении Ox показывают также достаточно простую картину динамики процесса — по мере продвижения оползня вдоль желоба (горизонтальные размеры модельного оползня соответствуют примерно двум третям максимальной ширины желоба) ускорение возрастает, достигая максимума примерно через 600 с после начала движения. Скорость оползня принимает максимальное значение в тот момент (750 с), когда ускорение переходит через ноль и начинается процесс торможения. Скорость стремится к нулю достаточно плавно, и, выйдя на пологий участок рельефа, оползень останавливается примерно через 1900 с.

Анализ аналогичных параметров для второго случая начального расположения оползня дает более интересную картину. Здесь траектория движения центра масс теряет свой прямолинейный характер и показывает, что, смещаясь с края желоба в сторону

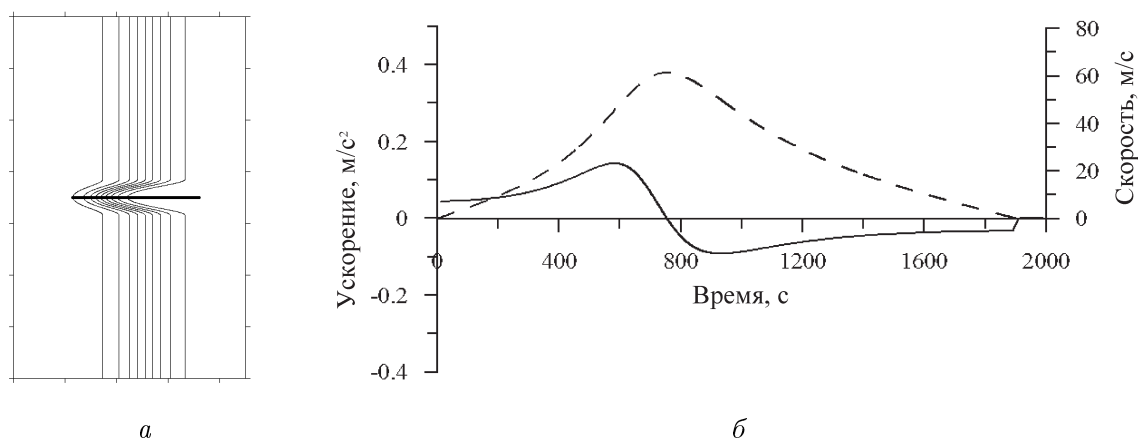


Рис. 2. Характеристики движения центра масс оползня, стартовавшего по центру желоба: *а* — траектория движения (жирная линия) на фоне изолиний глубин; *б* — соответствующие скорость (штрих) и ускорение (сплошная линия) вдоль оси Ox

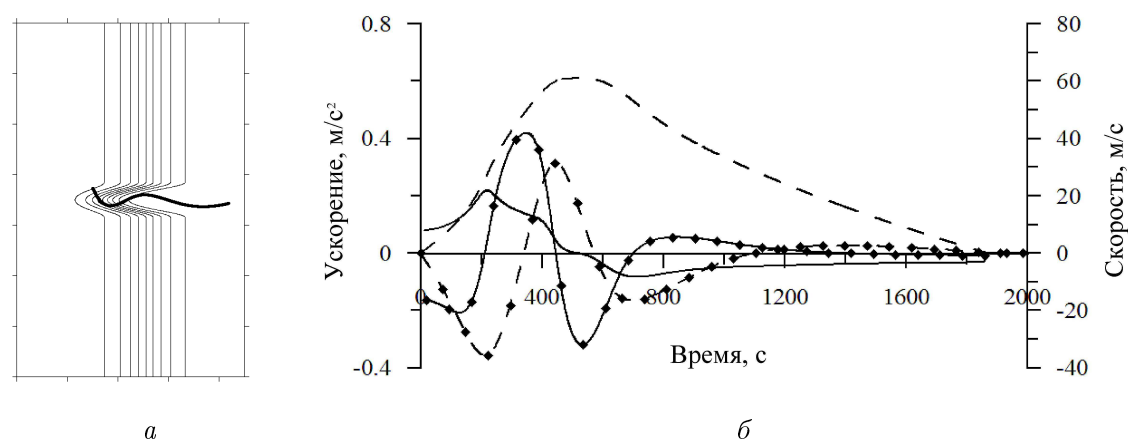


Рис. 3. Характеристики движения центра масс оползня, стартовавшего с края желоба: *а* — траектория движения (жирная линия) на фоне изолиний глубин; *б* — соответствующие скорости (штрих) и ускорения (сплошные линии); кривые без маркеров соответствуют значениям вдоль оси Ox , с маркерами — Oy

увеличения глубин, оползень по инерции движется на противоположный склон желоба, затем вновь скатывается вниз и оказывается на склоне, с которого начал свое движение, после чего, претерпевая еще одно малое колебание относительно центральной оси желоба, приближается к месту своей остановки, которая происходит примерно в тот же момент времени, что и в первом, простейшем, случае. Кривые на рис. 3, б показывают, что характер изменения x -компонент скорости и ускорения оползня практически сохраняется за исключением того, что график динамики ускорения становится менее монотонным. Динамика скорости и ускорения в направлении оси Oy имеет выраженный колебательный характер, полностью соответствуя описанному выше характеру динамики траектории движения в целом.

Общее представление о порождаемом движении оползня волновом процессе может быть получено с помощью картин свечения — пространственных распределений максимальных значений амплитуд за все время расчета (рис. 4). Они показывают, что естественная в первом случае симметричная картина весьма значительно меняется во втором, когда основная часть волновой энергии оказывается направленной в сторону первоначального сдвига слоя жидкости, который происходит на малой глубине.

Проявления волновых режимов на берегу иллюстрируются распределениями максимальных и минимальных высот волн, рассчитанных в береговых точках (рис. 5). Графики этих распределений показывают, что в первом случае практически вся волновая энергия распространяется в стороны от центральной оси желоба. В центре береговой линии положительные амплитуды имеют строгий минимум и их абсолютные значения в 7–8 раз меньше, чем в точках максимума, наблюдаемых на расстоянии $5b_y$. Для отрицательных амплитуд локальный максимум в центре хоть и имеется, но величина его также намного меньше (примерно в 5 раз), чем по бокам на том же расстоянии.

При постановке оползня в начальный момент времени на край желоба в части береговой линии, находящейся в стороне начального движения тела, амплитуды в два с небольшим раза больше, чем в противоположной части береговой линии и чем в предыдущем случае. По центру береговой линии амплитуды, в сравнении с максимальными,

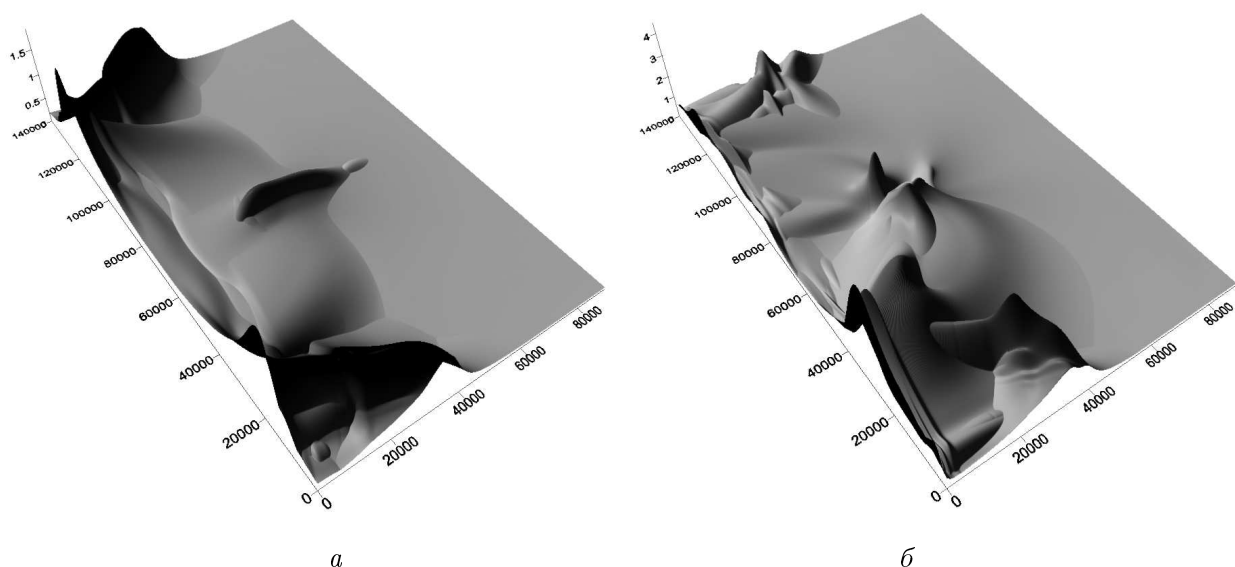


Рис. 4. Картины “свечения” — максимальных значений амплитуд за все время расчета: *a* — в случае оползня, стартовавшего по центру желоба, *б* — с его края

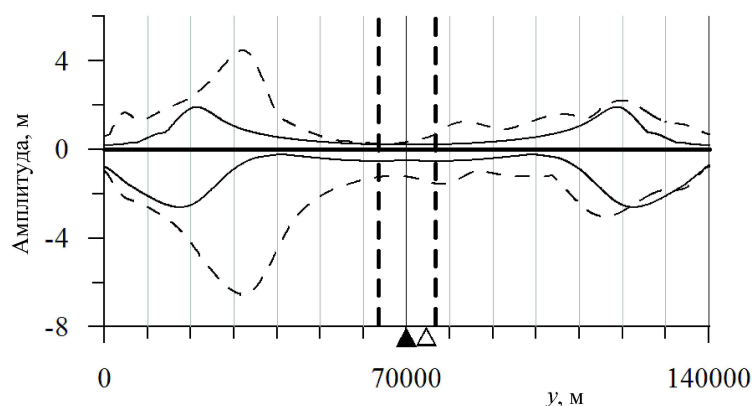


Рис. 5. Распределения максимальных и минимальных высот волн, рассчитанные в береговых точках: сплошные линии соответствуют оползнию, стартовавшему по центру желоба, штриховые — с его края. Треугольниками отмечены начальные y -координаты центров масс: сплошной соответствует первому случаю, контурный — второму. Вертикальные штриховые линии указывают границы желоба

по-прежнему незначительны. В целом распределение заплесков на берегу выглядит более немонотонно.

В заключение отметим, что при написании настоящей статьи наиболее важным авторы считали представление нового закона движения и демонстрацию его возможностей на достаточно простом, но характерном примере акватории с неоднородным рельефом дна. Последующие работы будут посвящены исследованию влияния на порождаемые волновые режимы физических характеристик оползня и склона, по которому он движется, — плотности оползневой массы, геометрических размеров оползня, параметров неоднородности рельефа, естественной кривизны береговой линии и др.

Список литературы

- [1] ЧУБАРОВ Л.Б., ФЕДОТОВА З.И., ЕЛЕЦКИЙ С.В. Численное моделирование генерации волн движением оползня. // Тр. Междунар. конф. по вычисл. математике. Новосибирск, 2004. Ч. II. С. 753–758.
- [2] ФЕДОТОВА З.И., ЧУБАРОВ Л.Б., БЕЙЗЕЛЬ С.А. Моделирование наката длинных волн в условиях динамически изменяющегося дна // Вычисл. технологии. Т. 9. Вестник КазНУ. № 3 (42). Совместный выпуск. По материалам Междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. 2004. Ч. 3. С. 141–149.
- [3] GRILLI S.T., WATTS P. Modeling of waves generated by moving submerged body. Applications to underwater landslide // Eng. Analysis With Boundary Elements. 1999. Vol. 23. P. 645–656.
- [4] ГАРАГАШ И.А., ЛОВКОВСКИЙ Л.И. Геометрическая оценка оползневых процессов и их мониторинг на склонах Черного моря в связи с реализацией проекта “Голубой поток” // Тр. VI Междунар. научно-техн. конф. “Современные методы и средства океанологических исследований”. М., 2000. С. 5–15.
- [5] ЕЛЕЦКИЙ С.В., МАЙОРОВ Ю.Б., МАКСИМОВ В.В. и др. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Вычисл. техно-

- логии. Т. 9. Вестник КазНУ. № 3 (42). Совместный выпуск. По материалам Междунар. конф. "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании". 2004. Ч. 2. С. 194–206.
- [6] ШОКИН Ю.И., ФЕДОТОВА З.И., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. и др. Моделирование генерации цунами движением оползня с учетом вертикальной структуры течения // Тр. VIII Всерос. конф. "Современные методы математического моделирования природных и антропогенных катастроф". Кемерово, 2005. С. 3–27.
- [7] БАБАЙЛОВ В.В., ЧУБАРОВ Л.Б. Численное моделирование движения оползня в рамках теории мелкой воды // Вычисл. технологии. Т. 9. Вестник КазНУ. № 3 (42). Совместный выпуск. По материалам Междунар. конф. "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании". 2004. Ч. 1. С. 217–226.
- [8] БЕЙЗЕЛЬ С.А., ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ЧУБАРОВ Л.Б. Моделирование поверхностных волн, возникающих при движении оползня по неровному дну // Rus. J. Numer. Analysis and Math. Modelling. 2010. В печати.
- [9] BEISEL S.A., CHUBAROV L.B., SHOKIN YU.I. Some features of the landslide mechanism of surface waves generation in real basins // Computational Science and High Performance Computing IV. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2010. В печати.

Поступила в редакцию 24 марта 2010 г.

ЖБТ. 2010. Т. 15, № 3. С. 39–51.

Simulation of surface waves generated by an underwater landslide moving along a spatially irregular slope

S.A. Beisel, G.S. Khakimzyanov, L.B. Chubarov

Numerical modelling of the surface waves generated by a movement of an underwater landslide along a spatially irregular slope is considered. The law of movement of a landslide is presented. Numerical model accounts for influences due to the forces of gravity, friction, buoyancy and hydrodynamic resistance that takes the effect of the added mass into account. Results of computing experiments for an idealized water domain are discussed.

Keywords: mathematical simulation, underwater landslide, irregular slope, surface waves.