

## Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну\*

Г. С. ХАКИМЗЯНОВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: khak@ict.nsc.ru

Н. Ю. ШОКИНА

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*  
*Section of Applied Mathematics, University of Freiburg, Freiburg, Germany*  
e-mail: shokina@mathematik.uni-freiburg.de

Выполнены расчеты волновых режимов при движении подводного оползня по криволинейному склону. Получены уравнения движения подводного оползня под действием сил тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды, и исследована зависимость возникающей волновой картины от начального заглубления оползня, его размеров и кривизны склона. Моделирование поверхностных волн, генерируемых при движении оползня по неровному дну, проводилось в рамках нелинейной модели мелкой воды с использованием схемы предиктор-корректор на адаптивной сетке.

*Ключевые слова:* подводный оползень, неровное дно, уравнения мелкой воды, поверхностные волны, силы тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды, численное моделирование, конечно-разностная схема, адаптивная сетка.

### Введение

В естественных и искусственных водоемах подводный оползень может привести к образованию поверхностных волн больших амплитуд, опасных для береговых сооружений. В последние годы появилось много публикаций (см. библиографический список работы [1]), посвященных результатам вычислительных и лабораторных экспериментов, воспроизводящих механизм генерации поверхностных волн движением по плоскому подводному откосу недеформируемого твердого тела. В статье [2] показано, что замена реального оползня модельным недеформируемым твердым телом и выбор для него подходящего закона движения приводят к адекватному описанию волновых процессов в широком диапазоне изменения таких параметров как угол наклона плоского откоса, толщина и длина оползня, его начальное заглубление.

В работах [2–4] показано, что численное моделирование возникающих волновых процессов на основе “полных” математических моделей, учитывающих вертикальные перемещения жидкости, позволяет воспроизводить значения амплитуд генерируемых

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-05-00294).

© ИВТ СО РАН, 2010.

волн, близкие к экспериментальным. В указанных работах исследовалась возможность использования различных приближенных математических моделей гидродинамики для описания оползневого механизма генерации поверхностных волн. Эти исследования показали, что общая картина возникающих волновых режимов приемлемо описывается даже с помощью модели мелкой воды, в которой вертикальные движения жидкости не принимаются во внимание.

Заметим, что в упомянутых работах рассматривалось движение только недеформируемого оползня и только по плоскому откосу. В настоящих исследованиях выполнено моделирование генерации поверхностных волн оползнем, движущимся по неровному склону. Предложено новое уравнение движения оползня, при выводе которого учитываются неровность склона, силы тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды. Для плоского откоса полученное уравнение при пренебрежении силой трения совпадает с приведенным в [2].

Моделирование поверхностных волн, генерируемых при движении оползня по неровному дну, авторами осуществлялось в рамках нелинейной модели мелкой воды с учетом подвижности дна. Для расчетов использовалась схема предиктор-корректор [5] на адаптивной сетке, сохраняющая в линейном случае монотонность профилей численного решения. Схема опробована на тестовой задаче с известным аналитическим решением, описывающим генерацию поверхностных волн недеформируемым телом, движущимся с постоянной скоростью по горизонтальному дну. Для неровного дна выполнен анализ зависимостей характеристик волновых режимов от крутизны склона, начальной глубины залегания оползня, его длины и толщины.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоский слой жидкости, ограниченный сверху свободной поверхностью, снизу — непроницаемым подвижным дном. Предполагается, что жидкость находится в поле силы тяжести, является несжимаемой и невязкой. Пусть декартова система координат  $Oxz$  выбрана так, что уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имеет вид  $z = 0$  и все характеристики жидкости зависят только от переменных  $x, t$ . Для моделирования гидродинамических параметров изучаемых явлений будем использовать нелинейную модель теории мелкой воды, уравнения которой имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad x \in (0, L), \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $L$  — длина области,  $\mathbf{u}$  — вектор решения,  $\mathbf{f}$  — вектор потоков,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x \end{pmatrix},$$

$u(x, t)$  — скорость,  $H = \eta + h$  — полная глубина,  $\eta(x, t)$  — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня  $z = 0$ , уравнение

$$z = -h(x, t) = h_{bt}(x) + h_{sl}(x, t)$$

задает форму подвижного дна,  $h_{bt}(x)$  и  $h_{sl}(x, t)$  — функции, определяющие его неподвижную и подвижную части,  $g$  — ускорение свободного падения.

На левой границе области предполагается наличие вертикальной непроницаемой стенки, правая граница считается открытой. На этих границах ставились условия непротекания и свободного прохода соответственно.

Предполагается, что в начальный момент времени жидкость покоится и известна функция  $z = h_{sl}^0(x)$ , описывающая начальную форму оползня:

$$h_{sl}(x, 0) = h_{sl}^0(x).$$

Форма и положение оползня при  $t > 0$  определяются законом его движения (выведен в следующем разделе).

Результаты [3] моделирования поверхностных волн, генерируемых оползнем, движущимся по плоскому откосу, дают основание утверждать, что приведенная математическая модель позволяет получить общее представление об исследуемом волновом процессе. В настоящей работе эта модель применяется для исследования поверхностных волн, возникающих при движении оползня по неровному склону, заданному однозначной функцией

$$z = h_{bt}(x). \quad (2)$$

## 2. Закон движения подводного оползня

Одним из главных факторов, определяющих особенности процесса волнообразования, обусловленного движением подводного оползня, является закон его движения. При моделировании оползня твердым телом такой закон задается для одной из характерных точек тела, например, для его центра масс. В работе [2] предложен закон движения оползней по плоскому откосу. В настоящем разделе дается вывод закона движения оползня по неровному подводному склону.

Предполагается, что в начальный момент времени оползень имеет конечные протяженность  $b$  и толщину  $T$ , а его поверхность описывается функцией  $z = h_{bt}(x) + h_{sl}^0(x)$ , где  $h_{sl}^0(x)$  — заданная неотрицательная функция с конечным носителем  $(x_l^0, x_r^0)$  длины  $b$  (вдоль оси  $Ox$ ) и максимальным значением  $T > 0$  в некоторой точке промежутка  $(x_l^0, x_r^0)$ .

При  $t > 0$  оползень может начать движение по наклонному дну. Опишем применяемый в работе упрощенный способ моделирования оползневого процесса, основанный на следующих предположениях:

1 — при выводе закона движения оползня последний отождествляется в каждый момент времени с некоторой материальной точкой  $\mathbf{x}_c(t)$ , имеющей абсциссу  $x_c(t)$  и скользящей вдоль неровного основания (2) согласно закону движения материальной точки по плоской кривой, при этом  $x_c(0) = x_c^0$ , где  $x_c^0 \in (x_l^0, x_r^0)$ ;

2 — положение оползня определяется исключительно значением абсциссы  $x_c(t)$  выделенной точки  $\mathbf{x}_c(t)$ , а его поверхность при  $t > 0$  описывается функцией

$$z = h_{bt}(x) + h_{sl}(x, t), \quad (3)$$

где  $h_{sl}(x, t) = h_{sl}^0(x + x_c^0 - x_c(t))$ .

Таким образом, в момент времени  $t$  оползень располагается на склоне между точками с абсциссами  $x_l(t) = x_l^0 - x_c^0 + x_c(t)$  и  $x_r(t) = x_r^0 - x_c^0 + x_c(t) = x_l(t) + b$  и при движении его длина (вдоль горизонтальной оси  $Ox$ ) остается неизменной. Отметим также, что при движении оползня его поверхность деформируется в соответствии с встречающимися

неровностями дна, однако объем оползня  $V$  и его масса  $M = \rho_{sl}V$  остаются неизменными (здесь  $\rho_{sl}$  — плотность материала оползня).

Опишем далее закон движения оползня, точнее, укажем способ вычисления функции  $x = x_c(t)$ , поскольку именно эта функция участвует в определении поверхности (3) движущегося оползня.

Пусть  $s$  — длина дуги кривой (2), отсчитываемая от ее начала. По предположению функция (2) является однозначной функцией переменной  $x$ , поэтому между переменными  $x$  и  $s$  имеется взаимно-однозначное соответствие, которое задается равенством

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [h'_{bt}(\xi)]^2} d\xi. \quad (4)$$

Предположим, что выделенная в начальный момент времени точка  $\mathbf{x}_c(0)$  соответствует параметру  $s = S_0$ , а движущаяся точка  $\mathbf{x}_c(t)$  с абсциссой  $x_c(t)$  — параметру  $s = S(t)$ . Тогда закон движения  $s = S(t)$  первоначально покоящейся материальной точки  $\mathbf{x}_c(t)$  вдоль кривой (2) имеет следующий вид:

$$m\ddot{S}(t) = F_\tau(t), \quad S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = 0, \quad (5)$$

где  $\ddot{S} = d^2S/dt^2$ ,  $\dot{S} = dS/dt$ ,  $m$  — величина, имеющая размерность массы,  $F_\tau(t)$  — касательная составляющая силы, действующей в момент времени  $t$  на движущуюся точку  $\mathbf{x}_c(t)$ .

В качестве величины  $m$  будем брать суммарную массу оползня  $M$  и присоединенную массу воды  $C_w\rho_wV$ , т.е.  $m = M + C_w\rho_wV = (\rho_{sl} + C_w\rho_w)V$ , где  $C_w$  — коэффициент присоединенной массы,  $\rho_w$  — плотность воды, принимаемая в расчетах равной единице.

Поясним теперь, что в уравнении (5) берется в качестве силы  $F_\tau$ , действующей на материальную точку  $\mathbf{x}_c(t)$ . В вертикальном направлении на каждый элемент оползня длины  $dx$  действуют сила тяжести и сила плавучести (выталкивающая сила воды). В произвольной точке  $x \in (x_l(t), x_r(t))$  касательная составляющая этих двух противоположно направленных сил к кривой (2) вычисляется по формуле

$$f_g(x, t) = (\rho_{sl} - \rho_w) h_{sl}(x, t) W g \sin \theta(x) dx,$$

где  $W$  — ширина оползня в направлении, перпендикулярном плоскости  $xOz$ ,  $\theta(x)$  — локальный угол наклона дна, при этом

$$\theta(x) = -\arctan h'_{bt}(x), \quad \sin \theta(x) = -\frac{h'_{bt}(x)}{\sqrt{1 + [h'_{bt}(x)]^2}}.$$

Таким образом, суммарное действие сил тяжести и плавучести на оползень конечного размера определяется силой

$$F_g(t) = (\rho_{sl} - \rho_w) W g \int_{x_l(t)}^{x_r(t)} h_{sl}(x, t) \sin \theta(x) dx, \quad (6)$$

действующей в касательном направлении на материальную точку  $\mathbf{x}_c(t)$ , движущуюся вдоль кривой (2). Сила (6) заставляет оползень ускоряться, в то время как сопротивление воды и трение оползня о дно способствуют замедлению движения. Касательная

составляющая силы сопротивления воды направлена против движения оползня, пропорциональна наибольшей площади  $TW$  поперечного сечения оползня и равна

$$F_r(t) = -\frac{1}{2}C_d\rho_wTW(\dot{S})^2, \quad (7)$$

где  $\dot{S}$  — скорость движения точки  $\mathbf{x}_0(t)$  вдоль кривой (2),  $C_d$  — коэффициент сопротивления воды. Отметим, что сила сопротивления (7) является пассивной, т. е. при отсутствии движения она исчезает.

Движение оползня тормозит также сила трения, направленная по касательной к кривой (2) в сторону, обратную направлению движения оползня. Эта сила тоже пассивна, поскольку при отсутствии движения она не может изменить местоположение оползня и ее влияние на положение оползня будет проявляться только при его движении ( $\dot{S} \neq 0$ ).

Вначале рассмотрим элемент оползня длины  $dx$ , для которого силу трения будем определять по нормальной реакции  $N(x, t)$ , действующей на выделенный элемент со стороны дна:

$$f_{fr}(x, t) = -C_f N(x, t), \quad (8)$$

где  $C_f$  — динамический коэффициент трения (коэффициент трения скольжения при движении). В рассматриваемой упрощенной модели оползневого процесса будем считать, что численное значение коэффициента  $C_f$  совпадает со значением коэффициента трения скольжения при покое, который будем определять путем указания угла трения  $\theta_*$ , т. е. такого порогового значения угла плоского откоса, при превышении которого оползень начинает соскальзывать по плоскому откосу. Этот же угол трения будет использоваться для криволинейных откосов. Из приведенных предположений вытекает следующая формула для определения динамического коэффициента трения:  $C_f = \tan \theta_*$ .

Нормальную силу  $N(x, t)$ , действующую на элемент  $dx$  оползня, определим как сумму нормальной составляющей силы тяжести и центробежной силы:

$$N(x, t) = (\rho_{sl} - \rho_w) h_{sl}(x, t)Wg \cos \theta(x) dx + (\rho_{sl} - \rho_w) h_{sl}(x, t)WK(x) (\dot{S}(t))^2 dx, \quad (9)$$

где  $K(x)$  — знакоопределенная кривизна основания дна:

$$K(x) = h''_{bt}(x) \left( \sqrt{1 + [h'_{bt}(x)]^2} \right)^{-3}.$$

Для плоского откоса  $K(x) = 0$ , в силу чего выражение (9) не содержит второго слагаемого. Из формул (8), (9) видно также, что в сравнении с плоским откосом в рассматриваемом случае неровность дна способствует уменьшению силы трения (по абсолютной величине) на выпуклых вверх участках дна ( $h''_{bt}(x) < 0$ ) и, наоборот, возрастанию — на выпуклых вниз участках дна ( $h''_{bt}(x) > 0$ ).

С учетом (9) получаем, что на движущийся оползень будет действовать следующая сила трения (приложенная в точке  $\mathbf{x}_c(t)$  и касающаяся в этой точке кривой (2)):

$$F_{fr}(t) = -C_f (\rho_{sl} - \rho_w) W \int_{x_l(t)}^{x_r(t)} h_{sl}(x, t) \left[ g \cos \theta(x) + K(x) (\dot{S}(t))^2 \right] dx. \quad (10)$$

Равнодействующая сил (6), (7), (10) и принимается за величину  $F_\tau$ , фигурирующую в формуле (5). Таким образом, с учетом принятых допущений задача (5) запишется в следующем виде:

$$(\rho_{sl} + C_w \rho_w) V \ddot{S} = (\rho_{sl} - \rho_w) W g I_1 - W \left[ (\rho_{sl} - \rho_w) I_2 + \frac{1}{2} C_d \rho_w T \right] (\dot{S})^2, \quad (11)$$

$$S(0) = S_0, \quad \dot{S}(0) = 0, \quad (12)$$

где

$$I_1(t) = \int_{x_l(t)}^{x_r(t)} h_{sl}(x, t) [\sin \theta(x) - C_f \cos \theta(x)] dx, \quad I_2(t) = C_f \int_{x_l(t)}^{x_r(t)} h_{sl}(x, t) K(x) dx,$$

а искомая величина  $x_c(t)$  связана с решением  $S(t)$  задачи (11), (12) соотношением (4):

$$S(t) = \int_0^{x_c(t)} \sqrt{1 + [h'_{bt}(\xi)]^2} d\xi.$$

Заметим, что уравнение (11) справедливо только для движущегося оползня. Поскольку оползень в начальный момент времени покоился, то этим уравнением можно воспользоваться при  $t > 0$  только в том случае, если оползень начнет движение. Из (11) следует, что достаточным условием возможности сдвига оползня в начальный момент времени является положительность интеграла  $I_1$  при  $t = 0$ :

$$I_1 = \int_{x_l^0}^{x_r^0} h_{sl}^0(x) [\sin \theta(x) - C_f \cos \theta(x)] dx > 0.$$

В силу нелинейности уравнения (11) для поиска его решения необходимо использовать численные методы. Для этого целесообразно переписать задачу (11), (12) в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(\gamma + C_w) \frac{V}{W} \dot{v}_c = (\gamma - 1) g I_1 - \left[ (\gamma - 1) I_2 + \frac{C_d}{2} T \right] v_c^2, \quad v_c(0) = 0, \quad (13)$$

$$\dot{S} = v_c, \quad S(0) = S_0, \quad (14)$$

где  $\gamma = \rho_{sl}/\rho_w$  — отношение плотностей материала оползня и воды,  $\gamma > 1$ . Решение данной задачи ищется до момента остановки оползня, т.е. до такого момента времени, при котором впервые значение  $v_c$  скорости оползня обратится в нуль (с заданной точностью).

### 3. Модельная акватория и модельный оползень

Для исследования влияния неровности рельефа дна на поверхностные волны, порождаемые движением подводного оползня, был выбран модельный рельеф (рис. 1) с ненулевой кривизной, заданный с помощью гладкой монотонно убывающей функции (2) вида

$$z = h_{bt}(x) = \frac{h_+ + h_-}{2} + \frac{h_+ - h_-}{2} \tanh [c(x - \xi)], \quad (15)$$

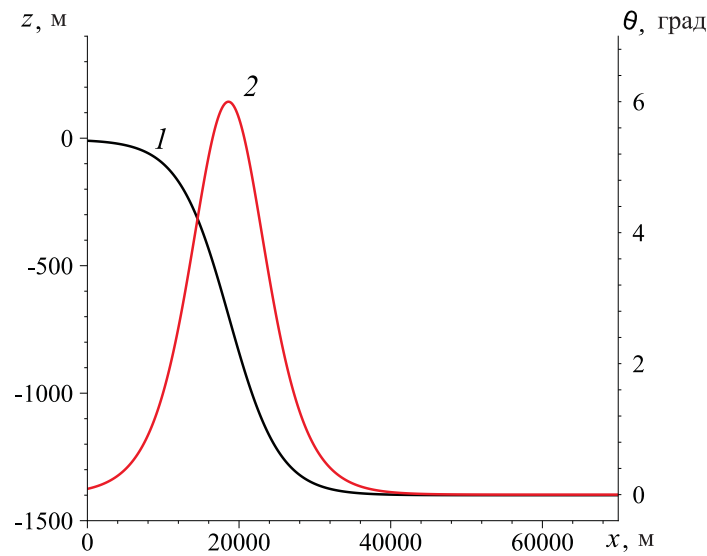


Рис. 1. Модельный рельеф  $z = h_{bt}(x)$  (1) и локальные углы наклона рельефа  $\theta(x)$  (2)

где  $h_+$ ,  $h_-$  — глубина дна соответственно в правой и левой бесконечно удаленной точке;  $c = \frac{2 \tan \theta_0}{h_- - h_+}$ ;  $\theta_0$  — максимальный угол наклона рельефа;  $\xi = \frac{1}{2c} \ln \frac{h_0 - h_+}{h_- - h_0}$  — точка перегиба;  $h_0$  — глубина в точке  $x = 0$ . В расчетах использовались следующие значения параметров:  $h_+ = -1400$  м,  $h_- = -5$  м,  $\theta_0 = 6^\circ$ ,  $h_0 = -10$  м. Длина области составляла 70 000 м.

Начальная форма модельного оползня задавалась по формуле

$$h_{sl}^0(x) = \begin{cases} \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi(x - x_c^0)}{b} \right) \right], & |x - x_c^0| \leq b/2, \\ 0, & |x - x_c^0| > b/2, \end{cases} \quad (16)$$

где  $x_c^0$ ,  $T$ ,  $b$  — заданные абсцисса вершины оползня при  $t = 0$ , толщина оползня и его длина (вдоль оси  $Ox$ ) соответственно, при этом  $x_l^0 = x_c^0 - b/2$ ,  $x_r^0 = x_c^0 + b/2 = x_l^0 + b$ . В расчетах толщина оползня  $T$  была выбрана равной 25 м, длина  $b$  — 5000 м. В начальный момент времени вершина оползня находилась над точкой дна, которой соответствует глубина  $d_c = -200$  м, поэтому

$$x_c^0 = \xi - \frac{1}{2c} \ln \left( \frac{d_c - h_+}{h_- - d_c} \right) \approx 12\,644 \text{ м.}$$

Указанные значения наряду со значениями констант, входящих в закон движения ( $\gamma = 1.5$ ,  $C_w = 1$ ,  $C_d = 1$ ,  $\theta_* = 1^\circ$ ), будут использоваться в вычислительных экспериментах “по умолчанию”, если иное не оговорено специально.

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Для расчетов поверхностных волн, генерируемых движением оползня, использовалась схема предиктор-корректор на адаптивной сетке [5], аппроксимирующая уравнения

мелкой воды (1), записанные в новых координатах  $(q, t)$ :

$$(J\mathbf{u})_t + (\mathbf{f} - x_t\mathbf{u})_q = \mathbf{G}.$$

Здесь  $J(q, t)$  — якобиан невырожденного преобразования координат

$$x = x(q, t), \quad x(0, t) = 0, \quad x(1, t) = L, \quad (17)$$

которое в каждый момент времени  $t$  взаимно-однозначно отображает единичный отрезок  $[0, 1]$  на отрезок  $[0, L]$ . Для построения адаптивной сетки использовался метод эквираспределения [6], суть которого заключается в том, что из множества всевозможных отображений вида (17) выбирается то, которое является решением начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} (w(x, t)x_q)_q &= \beta x_t, \quad q \in (0, 1), \quad t > 0, \\ x(0, t) &= 0, \quad x(1, t) = L, \quad x(q, 0) = x^0(q), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\beta$  — положительный параметр, подбираемый экспериментальным путем в целях уменьшения осцилляций траекторий узлов подвижной сетки,  $w(x, t)$  — заданная управляющая функция.

#### 4.1. Тестовая задача о генерации поверхностных волн при движении тела по горизонтальному дну

В качестве тестовой рассмотрим задачу о генерации поверхностных волн твердым телом заданной формы (16), движущимся с постоянной скоростью  $v_c > 0$  по горизонтальному дну  $h_{bt}(x) \equiv -h_0$ . Таким образом, в этой задаче функция, описывающая подвижное дно, изменяется со временем по следующему закону:

$$h(x, t) = h_0 - h_{sl}^0(x + x_c^0 - x_c(t)),$$

где  $x_c(t) = x_c^0 + v_c t$ . В рассматриваемой тестовой задаче полная глубина  $H_0(x)$  и скорость жидкости  $u_0(x)$  в начальный момент времени подбирались таким образом, чтобы задача Коши для уравнений (1) с этими начальными данными имела решение в виде волны, распространяющейся с постоянной скоростью  $v_c$ :

$$u(x, t) = u_0(x - v_c t), \quad H(x, t) = H_0(x - v_c t). \quad (19)$$

Подставляя данное решение в уравнения (1) и требуя, чтобы на бесконечности жидкость покоилась, получаем, что начальные функции должны удовлетворять соотношениям

$$H_0(x) [u_0(x) - v_c] = -v_c h_0, \quad \frac{[u_0(x) - v_c]^2}{2} + g [H_0(x) - h(x, 0)] = \frac{v_c^2}{2}. \quad (20)$$

Откуда следует кубическое уравнение для определения функции  $H_0(x)$ :

$$\overline{H}_0^3 - \overline{H}_0^2 \left( \overline{h}(x, 0) + \frac{\overline{v}_c^2}{2} \right) + \frac{\overline{v}_c^2}{2} = 0, \quad (21)$$

где  $\overline{H}_0 = H_0/h_0$ ,  $\overline{h} = h/h_0$ ,  $\overline{v}_c = v_c/\sqrt{gh_0}$ . Уравнение (21) может не иметь положительных корней либо иметь один или два положительных корня, соответствующих докритическому и сверхкритическому течению. Это зависит от заданных значений скорости



движения тела  $v_c$  и его толщины  $T$ . Здесь рассматривается случай докритического течения, который реализуется при выполнении условия докритичности течения над вершиной движущегося тела:

$$\bar{T} < 1 - \frac{3\bar{v}_c^{2/3} - \bar{v}_c^2}{2},$$

где  $\bar{T} = T/h_0$ . На рис. 2, *a* показана верхняя граница области докритического течения. Задавая значения  $T > 0$  и  $v_c > 0$ , соответствующие этой области, находим бóльший положительный корень уравнения (21), по первой из формул (20) определяем начальную скорость  $u_0(x)$ , а затем по формулам (19) находим точное решение уравнений (1).

На рис. 3, *a* показаны графики свободной границы для точного и численного решений в момент времени  $t = 2000$  с, к которому поверхностная волна в форме впадины прошла расстояние, примерно равное восьми своим длинам. В расчетах значения параметров  $x_c^0$ ,  $b$  брались такими же, как указано в разд. 3, скорость  $v_c$  движения тела полагалась равной 20 м/с. Линии 1 на рис. 3, *a* получены при  $h_0 = 200$  м,  $T = 25$  м (на рис. 2, *a* этим данным соответствует точка 1). Видно, что несмотря на использование в расчетах сетки с небольшим количеством узлов  $N = 100$ , имеет место достаточно хорошая точность численного решения. Причиной этого является применение адаптивной сетки, сгущающейся в окрестности впадины (см. рис. 3, *б*) и отслеживающей движение волны. Отметим, что при использовании равномерной неподвижной сетки сравнимая точность достигается при на порядок бóльшем количестве узлов.

Линии 2 на рис. 3, *a* и точка 2 на рис. 2, *a* соответствуют движению тела по горизонтальному дну глубины  $h_0 = 400$  м. Видно, что двукратное увеличение глубины ведет к уменьшению амплитуды волны почти в три раза. Нелинейному уменьшению амплитуды волны способствует и уменьшение толщины тела (см. линии 3 на рис. 3, *a*, и точку 3 на рис. 2, *a*, полученные при  $h_0 = 200$  м,  $T = 12.5$  м). Нелинейный характер зависимостей минимального значения  $\eta_{\min}$  во впадине волны от входных данных демонстрируется на рис. 2, *б*, где показаны графики изменения амплитуды волны  $\eta_{\min}$  при варьировании

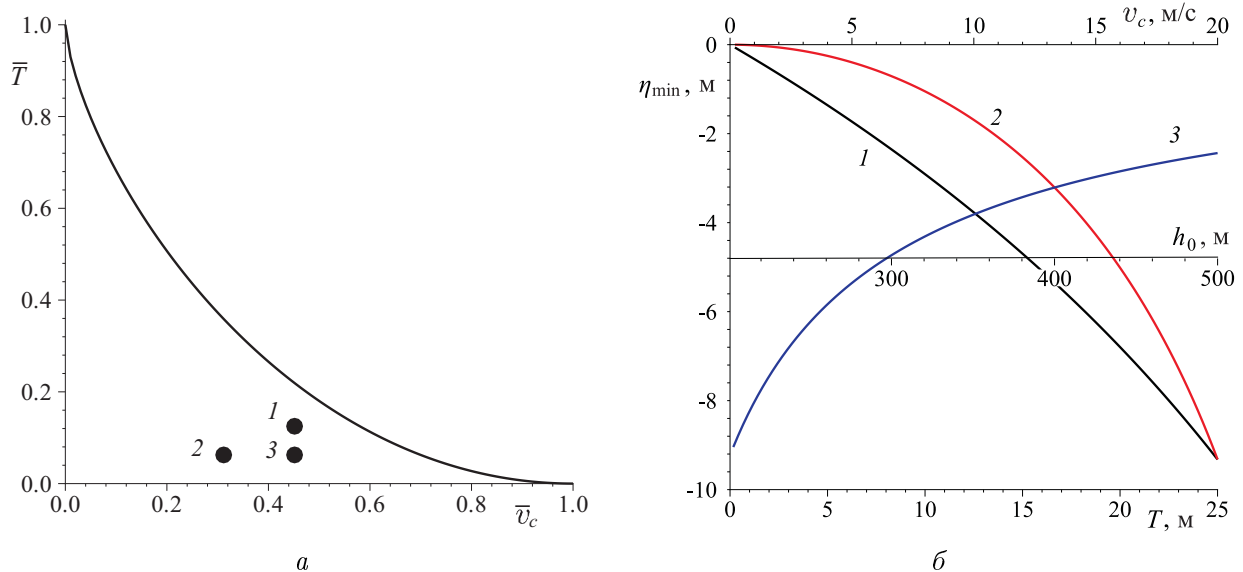


Рис. 2. Граница области докритического течения в плоскости параметров  $\bar{T}$  и  $\bar{v}_c$  (*a*) и графики зависимостей  $\eta_{\min}(T)$  (1),  $\eta_{\min}(v_c)$  (2),  $\eta_{\min}(h_0)$  (3) (*б*)

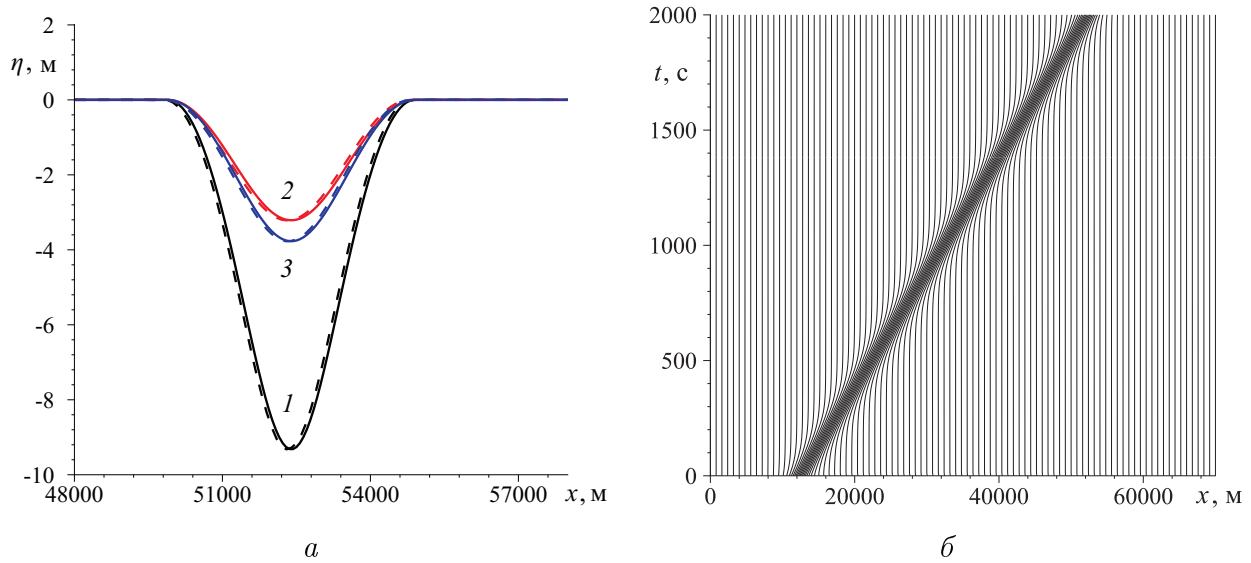


Рис. 3. Графики точного (сплошные линии) и численного (штрих) решений в момент времени  $t = 2000$  с (а) и траектории узлов адаптивной сетки (б),  $N = 100$

одного из трех параметров  $T$ ,  $v_c$  или  $h_0$  и неизменных значений двух других, которые полагались равными  $T = 25$  м,  $v_c = 20$  м/с и  $h_0 = 200$  м. Заметим, что амплитуда генерируемой волны не зависит от длины тела  $b$ , влияющей лишь на длину волны.

Хорошее согласование полученных численных результатов с точным решением тестовой задачи позволяет надеяться на достоверность приведенных ниже расчетных данных для задачи о генерации волн оползнем, движущимся по неровному дну.

#### 4.2. Общие характеристики волновых режимов, порождаемых движением оползня по неровному склону

Перейдем к рассмотрению особенностей волнообразования при движении оползня по неровному склону (15). Неровное дно оказывает влияние не только на характер трансформации волн при их распространении, но и на закон движения оползня. На рис. 4, а показаны траектория движения вершины оползня (линия 1), перемещающегося под действием сил тяжести, выталкивания, трения и сопротивления окружающей жидкости, и график изменения скорости движения оползня (линия 2). На профиле рельефа (линия 3) два крайних кружка изображают начальное ( $t = 0$  с,  $x_c = 12\,644$  м) и конечное ( $t = 1370$  с,  $x_c = 37\,233$  м) положения оползня, а средний — положение ( $x_c = 22\,624$  м) оползня в момент ( $t = 512$  с) достижения максимальной скорости ( $v_c \approx 37.5$  м/с) его движения, при этом в данный момент времени оползень находится ниже точки перегиба ( $\xi = 18\,673$  м) профиля дна. Как видно из графика скорости, промежуток времени, соответствующий разгону оползня ( $\Delta_1 t = 512$  с), существенно меньше промежутка торможения ( $\Delta_2 t = 858$  с). Примерно в таком же отношении находятся пути, пройденные оползнем на участках разгона и торможения. По графику скорости также видно, что остановка оползня происходит резко (при ненулевом отрицательном значении ускорения).

На рис. 4, б изображены профили свободной границы в моменты времени, близкие к моменту достижения оползнем максимальной скорости. Точками здесь показаны положения вершины оползня в эти моменты времени на траектории ее движения (на линии  $x = x_c(t)$ ). Из приведенных графиков следует, что максимальное отклонение свободной границы от невозмущенного состояния достигается точно над вершиной оползня и образовавшаяся здесь “впадина” движется вместе с оползнем, при этом в отличие от тестовой задачи амплитуда “впадины” со временем меняется. Перед оползнем формируется волна повышения, которая толкается оползнем в сторону увеличения глубин и постепенно отделяется от него с образованием на заднем фронте волны понижения (линия 3 на рис. 4, б). Слева от “впадины”, сопровождающей оползень, также формируется волна понижения, которая движется в сторону берега.

Указанные особенности оползневого механизма волнообразования хорошо иллюстрируются рис. 5, а, где изображена поверхность  $z = \eta(x, t)$ . Видно, что волна понижения, двигающаяся к берегу, отражается от расположенной здесь вертикальной стенки в виде волны повышения, уходящей вправо. Рассмотрение динамики свободной границы на более продолжительные промежутки времени показывает, что колебания уровня воды на левой стенке продолжают и после отражения набегающей волны понижения, однако максимальный вертикальный заплеск происходит во время взаимодействия со стенкой именно этой волны. Видно также, что при торможении оползня амплитуда идущей над ним “впадины” монотонно уменьшается и при остановке оползня формируются две противоположно направленные волны с небольшими амплитудами.

На рис. 5, б представлены траектории узлов адаптивной сетки, которая, как и в рассмотренной выше тестовой задаче, сгущалась в зонах максимальных значений величины  $|\eta(x, t)|$ . Отчетливо видно, что равномерная в начальный момент сетка начинает перестраиваться с ростом времени в неравномерную, автоматически отслеживающую движущиеся волны повышения и понижения. На рисунке штриховой линией нанесена траектория движения вершины оползня, согласно которой при больших скоростях его

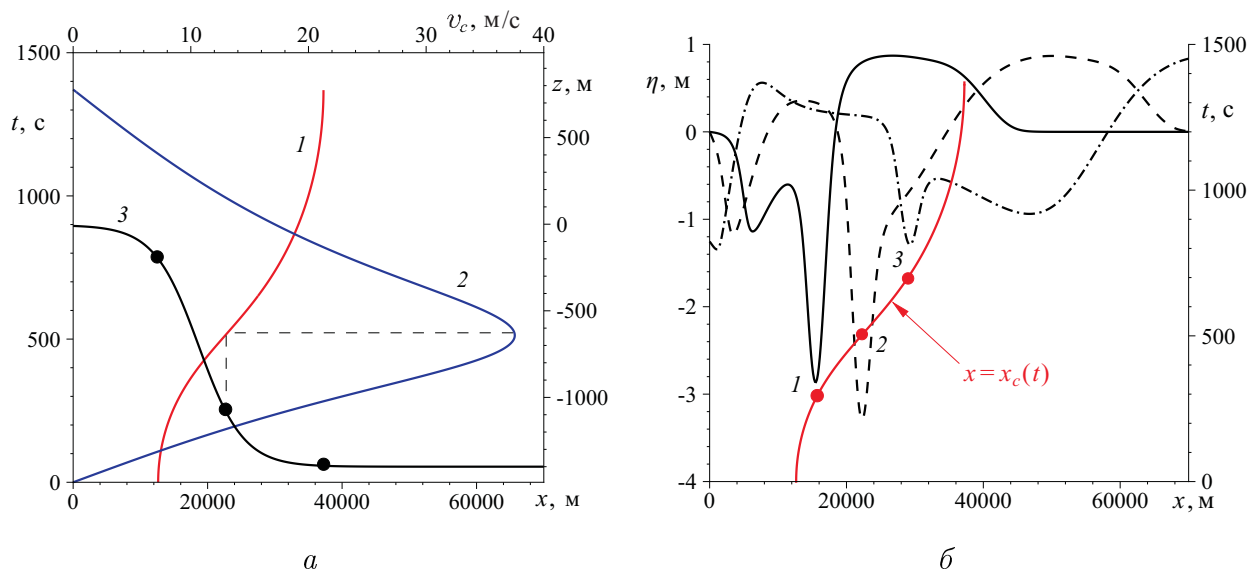


Рис. 4. Графики функций  $x = x_c(t)$  (1),  $v = v_c(t)$  (2) и  $z = h_{bt}(x)$  (3) (а) и графики свободной границы в моменты времени  $t = 300$  с (1),  $500$  с (2) и  $700$  с (3) (б)

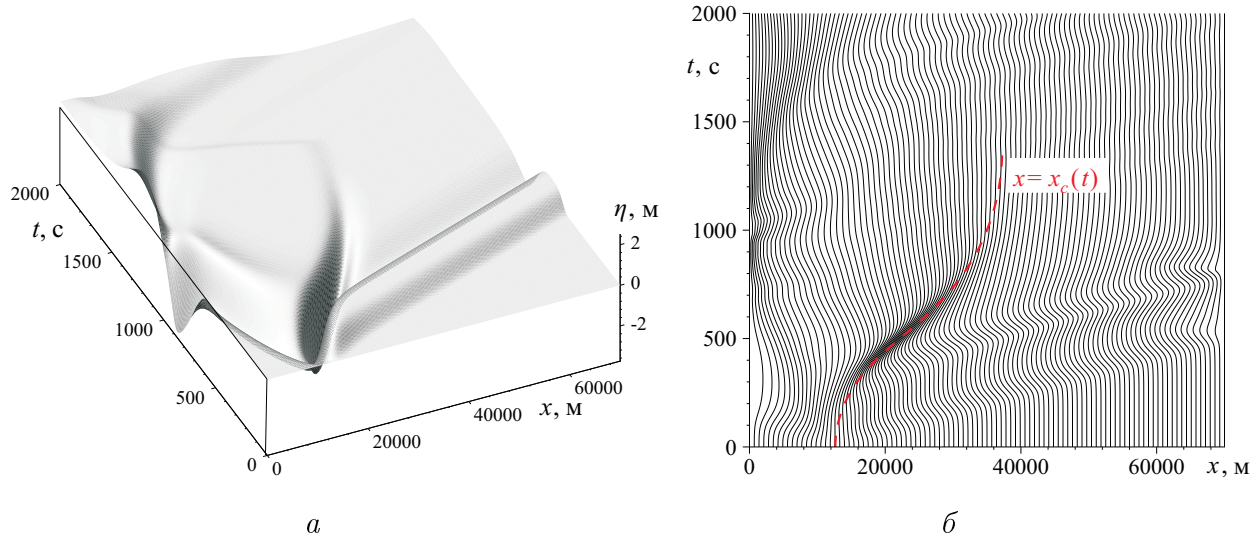


Рис. 5. Динамика свободной поверхности (а) и траектории узлов адаптивной сетки (б)

движения сетка имеет сильное сгущение в окрестности этой траектории и адаптируется к движущейся “впадине”. При уменьшении амплитуды “впадины” сгущение рассасывается и сетка адаптируется к другим волнам, имеющим преобладающую амплитуду.

#### 4.3. Зависимость волновых процессов от размеров оползня

Для изучения влияния на волновые процессы таких характеристик как крутизна склона, длина, толщина и начальное заглубление оползня были выполнены вычислительные эксперименты, в которых один из параметров варьировался, а значения всех остальных выбирались такими же, как указано в разделе 3.

Вначале рассмотрим зависимость генерируемого оползнем волнового режима от толщины оползня  $T$ . Поскольку объем модельного оползня (16) определяется по формуле  $V = WTb/2$ , то величина  $T$  в качестве множителя будет входить во все слагаемые уравнения (13). Следовательно, закон движения оползня не будет меняться при изменении его толщины  $T$  (рис. 6, а).

Вместе с тем амплитуда генерируемых волн, существенно зависит от параметра  $T$ . На рис. 6, б показаны мареограммы, записанные в двух мареографных точках. Мареограф А расположен на берегу и фиксирует высоту свободной поверхности на вертикальной стенке (в точке  $x = 0$ ). Подвижный мареограф В перемещается вместе с оползнем, имеет абсциссу  $x = x_c(t)$  и измеряет глубину “впадины” над оползнем. Видно, что эта глубина монотонно увеличивается с ростом  $T$ , что находится в качественном соответствии с решением тестовой задачи (см. поведение линии 1 на рис. 2, б). Отметим, что при каждом фиксированном значении  $T$  глубина “впадины” достигает своей максимальной величины на участке разгона, причем это происходит гораздо раньше момента достижения оползнем максимальной скорости. Рост глубины “впадины” при возрастании толщины оползня способствует увеличению амплитуды волны понижения, приходящей к берегу и, как следствие, к росту вертикального заплеска (см. мареограммы А), при этом наблюдается почти линейный характер всех указанных зависимостей от  $T$ .

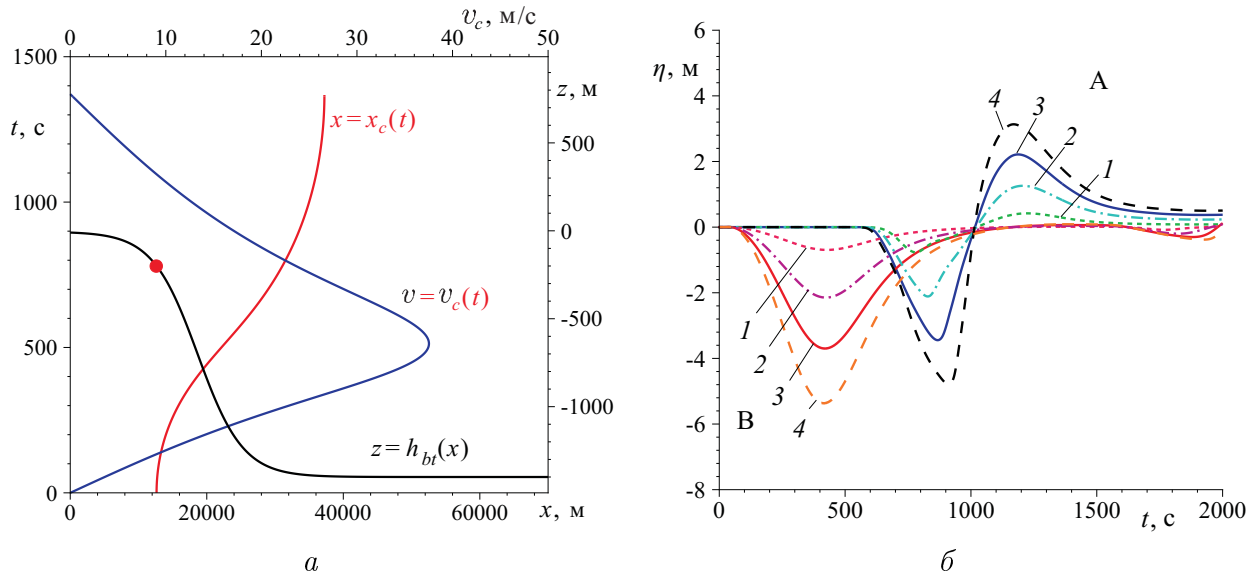


Рис. 6. Влияние толщины оползня  $T$  на характеристики движения оползня и генерируемых им волн;  $b = 5000$  м,  $d_c = -200$  м,  $\theta_0 = 6^\circ$ ; а — графики функций  $x = x_c(t)$ ,  $v = v_c(t)$  и  $z = h_{bt}(x)$ ; б — мареграммы А и В;  $T = 5$  м (1), 15 м (2), 25 м (3), 35 м (4)

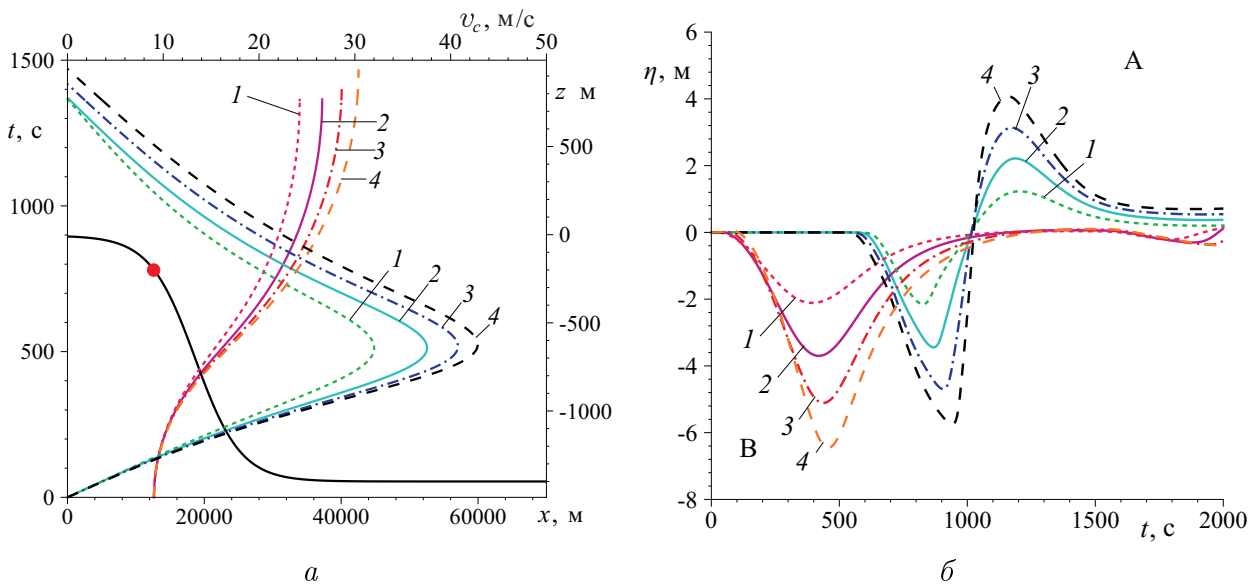


Рис. 7. Влияние длины оползня  $b$  на характеристики движения оползня и генерируемых им волн;  $T = 25$  м,  $d_c = -200$  м,  $\theta_0 = 6^\circ$ ; а — графики функций  $x = x_c(t)$ ,  $v = v_c(t)$  и  $z = h_{bt}(x)$ ; б — мареграммы А и В;  $b = 3000$  м (1), 5000 м (2), 7000 м (3), 9000 м (4)

Увеличение длины оползня  $b$  приводит к тем же качественным изменениям мареграмм (рис. 7, б), что и увеличение его толщины  $T$ . На законе движения изменение величины  $b$  проявляется в том, что более протяженный оползень движется дольше и с большей скоростью и, как следствие, проходит большее расстояние по склону, чем менее протяженный (рис. 7, а, здесь старт оползня показан точкой).

#### 4.4. Зависимость волновых процессов от начального заглубления оползня и крутизны склона

На рис. 8, *a* маркерами указаны точки старта оползней с различными величинами начального заглубления  $d_c$ . Видно, что при любых  $d_c$  точки остановки оползней практически не различаются, но вместе с тем заметно различаются времена движений и максимальные значения скоростей: для “мелководных” оползней они больше, чем для “глубоководных”.

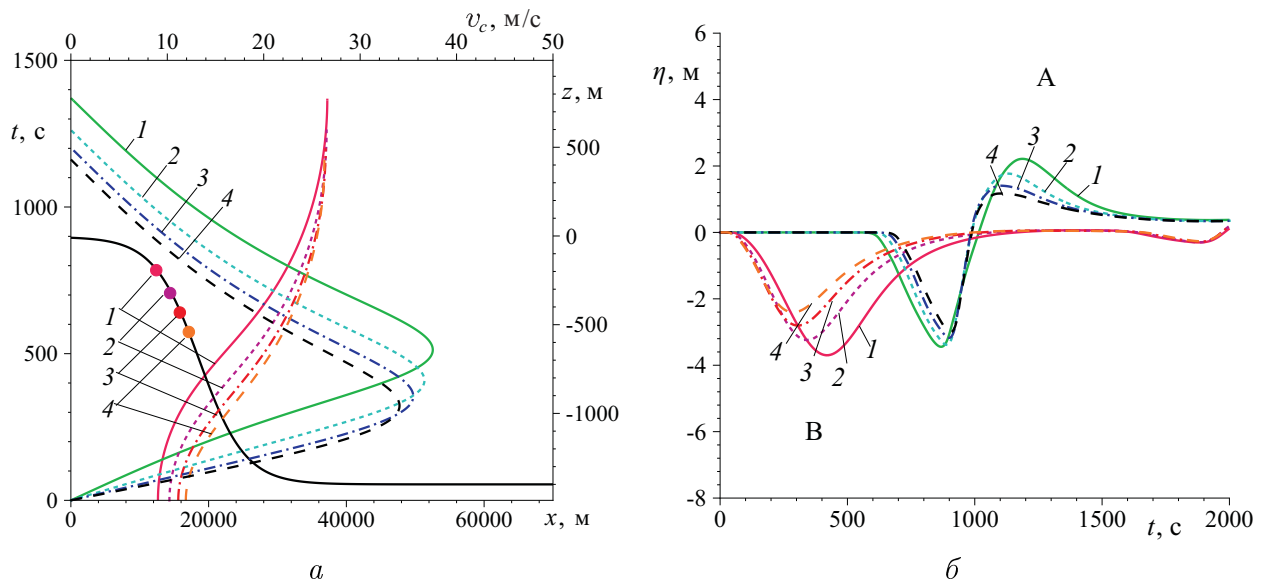


Рис. 8. Влияние начального заглубления оползня  $d_c$  на характеристики движения оползня и генерируемых им волн;  $T = 25$  м,  $b = 5000$  м,  $\theta_0 = 6^\circ$ ; *a* — графики функций  $x = x_c(t)$ ,  $v = v_c(t)$  и  $z = h_{bt}(x)$ ; *b* — мареграммы А и В;  $d_c = -200$  м (1),  $-300$  м (2),  $-400$  м (3),  $-500$  м (4)

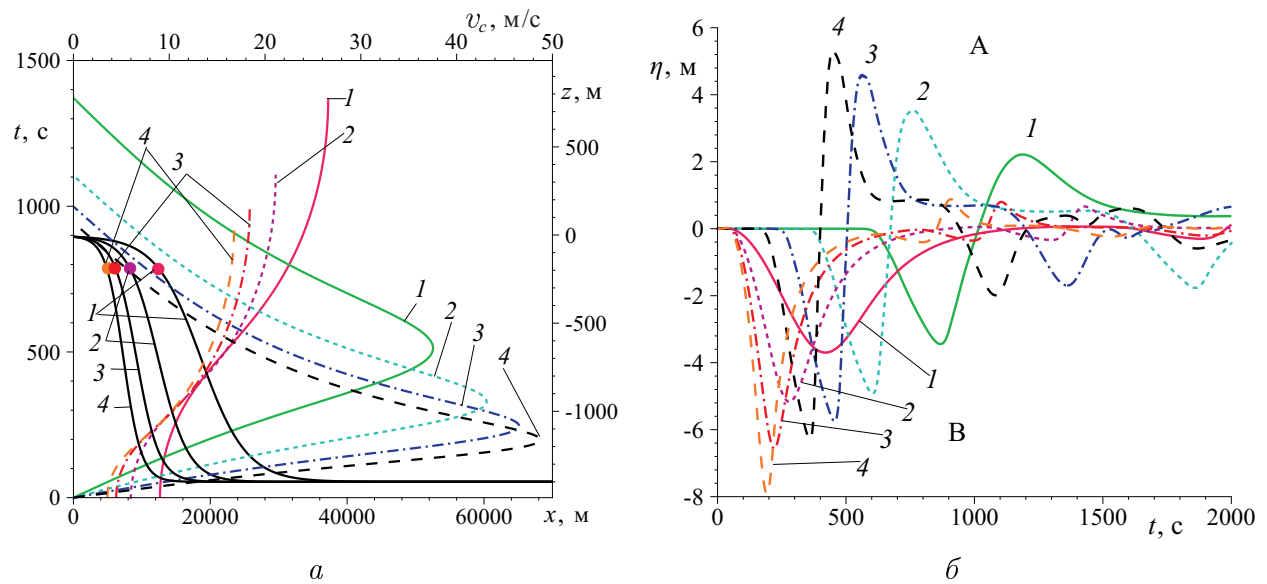


Рис. 9. Влияние крутизны склона на характеристики движения оползня и генерируемых им волн;  $T = 25$  м,  $b = 5000$  м,  $d_c = -200$  м; *a* — графики функций  $x = x_c(t)$ ,  $v = v_c(t)$  и  $z = h_{bt}(x)$ ; *b* — мареграммы А и В;  $\theta_0 = 6^\circ$  (1),  $9^\circ$  (2),  $12^\circ$  (3),  $15^\circ$  (4)

боководных”. Соответственно и амплитуды генерируемых волн больше для оползней, стартующих с меньшей глубины (рис. 8, б), что качественно согласуется с результатами решения тестовой задачи (см. поведение линии 3 на рис. 2, б).

На рис. 9, а показаны графики траекторий оползней и их скоростей при разных значениях угла наклона  $\theta_0$  профиля дна в точке перегиба. Поскольку начальное заглубление оползней одинаково, то на более крутых склонах точки старта оползней (обозначены маркерами) располагаются ближе к берегу, чем на менее крутых. Большая крутизна склона приводит к тому, что развиваемая оползнем скорость принимает большие значения, а участок разгона и время движения — меньшие, чем эти величины при более пологом склоне. С ростом крутизны склона возрастают и заплески на стенку (см. ма-реограммы А на рис. 9, б).

## 5. Заключение

В представленной работе получены уравнения, описывающие движение подводного оползня по криволинейному склону под действием сил тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды. С использованием предложенного закона движения выполнены расчеты волновых режимов при различных значениях начального заглубления модельного оползня, его размеров и крутизны модельного склона. Результаты численного моделирования подтвердили предположение о том, что наибольшую опасность для береговых сооружений представляют волны, генерируемые движением оползней больших размеров вблизи берега на крутых склонах. В дальнейшем полученный закон движения оползня будет использован для расчета генерируемых поверхностных волн на основе нелинейно-дисперсионных и полных гидродинамических моделей.

## Список литературы

- [1] Шокин Ю.И., ЧУБАРОВ Л.Б. О подходах к численному моделированию оползневого механизма генерации волн цунами // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, Спец. выпуск, часть 2. С. 100–111.
- [2] WATTS P., IMAMURA F., GRILLI S. T. Comparing model simulations of three benchmark tsunami generation cases // Science of Tsunami Hazards. 2000. Vol. 18, No. 2. P. 107–123.
- [3] Елецкий С.В., МАЙОРОВ Ю.Б., МАКСИМОВ В.В. и др. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, Спец. выпуск, часть 2. С. 194–206.
- [4] WATTS P., GRILLI S.T., KIRBY J.T. ET AL. Landslide tsunami case studies using a Boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2003. Vol. 3, No. 5. P. 391–402.
- [5] Шокин Ю. И., ХАКИМЗЯНОВ Г. С. Схема предиктор-корректор, сохраняющая гидравлический скачок // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, Спец. выпуск, часть 2. С. 92–99.
- [6] ЧИСЛЕННОЕ моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хаки-мзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Баракнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 394 с.