Расширенная аннотация отчета по проекту РФФИ № 12-01-00721

Фундаментальная проблема, на решение которой направлен проект, связана с разработкой адаптивных численных алгоритмов для исследования длинных поверхностных волн в рамках новых нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды.

В ходе выполнения проекта выполнен вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики, не использующий предположений о малости амплитуды волн (полная НЛД-модель на сфере) и о потенциальности исходного трехмерного течения. Получены новые слабодисперсионные уравнения на сфере для течений над подвижным или медленно меняющимся неровным дном, причем структура уравнений этих приближенных НЛД-моделей оказалась полностью идентичной структуре уравнений полной НЛД-модели. Для полученных моделей найдены законы изменения полной энергии, имеющие важное значение для верификации численных алгоритмов. Разработан единый для всех моделей численный алгоритм, основанный на расщеплении систем НЛД-уравнений на эллиптическую и гиперболическую части.

Изучено влияние дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в ограниченных водохранилищах. При этом исследовались поверхностные волны, возникающие при движении модельного «трехмерного» оползня по склону «трехмерного» модельного водоема. Новизна этих исследований связана с использованием новых уравнений движения оползня, учитывающих неровность подводного склона, применением в расчетах адаптирующихся сеток, а также сравнительного анализа результатов расчетов на основе иерархии математических моделей: бездисперсионной модели мелкой воды, полной и приближенных НЛД-моделей и модели трехмерных потенциальных течений жидкости. Для плоского откоса выполнено сравнение результатов расчетов с известными лабораторными данными о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу. На основе этих сравнений установлено, что НЛД-модель удовлетворительно описывает большее число волн, чем бездисперсионная модель мелкой воды, в частности, результаты расчетов по НЛД-модели лучше соответствуют экспериментальным данным по значениям локальных экстремумов генерируемых волн.

Третье направление исследований, предусмотренное общим планом работ по проекту, связано с задачами наката волн на берег. В настоящее время наибольшее распространение для расчета зон затопления при выходе волны цунами на берег получили конечно-разностные и конечно-элементные методы сквозного счета. При выполнении настоящего проекта использовались алгоритмы с выделением линии уреза. В этом подходе область течения покрывается подвижной сеткой, одна из крайних координатных линий которой совпадает с подвижной линией уреза, движущейся по береговому откосу в сторону суши при накате волн и в сторону моря – при откате. Положение границы вода-суша определялось с использованием в окрестности линии уреза точных аналитических решений уравнений мелкой воды на временном промежутке, равном шагу по времени разностной схемы предиктор-корректор.

Эта схема является базовой при моделировании поверхностных волн как в рамках бездисперсионной модели мелкой воды, так и на основе НЛД-моделей, как в плановой постановке, так и в сферической геометрии. Поэтому на всех этапах выполнения проекта выполнялось постоянное совершенствование схемы как на равномерных, так и на динамически адаптивных сетках. Выработаны практические рецепты преодоления трудностей, возникающих при решении многомерных задач на адаптивных сетках. Указаны формулы для схемных параметров, при выборе которых сохраняется монотонность численного решения. Выведен геометрический закон сохранения в разностной форме и доказано выполнение разностного аналога геометрического закона сохранения при использовании схемы предиктор-корректор. Предложена модификация классического метода эквираспределения построения подвижных сеток, позволяющая избежать возникновения осцилляций траекторий узлов и резкого изменения площадей соседних ячеек сетки. С помощью метода дифференциального приближения дано новое объяснение механизма возникновения нефизичных численных решений в задаче Римана с точным решением в виде волны разрежения. Предложена новая процедура энтропийной коррекции разностной схемы, основанная на анализе ее первого дифференциального приближения.

Результаты выполненных методических исследований существенно использовались при построении численных алгоритмов для решения задач наводнения-осушения. Для сокращения временных затрат на построение сетки в расчетах использовались две криволинейные сетки. Первая, называемая базовой, строилась заранее, до решения задачи, она покрывала акваторию и часть прилегающей к ней суши. При этом крайняя координатная линия сетки проходила по суше на достаточном удалении от начальной линии уреза. Вторая сетка, называемая расчетной, строилась на каждом шаге по времени, адаптировалась к решению, к подвижной линии уреза, но была в некотором смысле «одномерной», поскольку ее узлы не могли перемещаться произвольным образом в двух направлениях, а могли двигаться только вдоль координатных линий одного семейства базовой сетки. Их положение определялось путем решения одномерных уравнений метода эквираспределения для построения сетки на плоских кривых.

Для плоского откоса результаты расчетов сравнивались с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными. Сравнение численных результатов с аналитическими решениями в той области параметров, в которой эти решения справедливы, показало, что численные результаты хорошо согласуются с точными решениями. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что в задачах наката замена криволинейного откоса на плоский может привести к большим погрешностям при определении зоны затопления.

Описанный подход решения плановых задач наката-отката применялся для определения зон затопления при накате волн цунами на берег со слабо искривленной линией уреза. Для сильно изрезанной береговой линии разработан комбинированный метод численного моделирования наката длинных волн на побережье, основанный на использовании двумерной модели мелкой воды для расчета распространения волны от источника землетрясения к побережью и одномерного моделирования наката вдоль сечений, проведенных от некоторой прибрежной изобаты до выбранной изолинии рельефа на суше. Разработана процедура восстановления границы затопления суши по результатам решения одномерных задач. Разработанная методика применялась для расчета зон затопления реальных участков побережья и показала удовлетворительное согласование численных результатов с данными натурных наблюдений.

По темам, связанным с задачами проекта, опубликовано 26 работ (включая тезисы) и 1 учебное пособие для студентов старших курсов, защищены 4 магистерские диссертации и подготовлены материалы для кандидатской диссертации.

Важнейшие публикации по проекту, включенные в систему цитирования Web of science

1. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558. (DOI: 10.1515/rnam-2012-0031)
2. Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690-699. (DOI: 10.1134/S0021894412050082)
3. Shokina N.Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 603-626. (DOI: 10.1515/rnam-2012-0035)
4. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. Vol. 55, No. 3. P. 404-416. (DOI: 10.1134/S0021894414030043)
5. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3. P. 167-178. (DOI: 10.1515/rnam-2014-0013).

Форма 503. РАЗВЕРНУТЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ

3.1. *Номер проекта:*
12-01-00721

3.2. *Название проекта:*
Разработка адаптивных алгоритмов для численного моделирования поверхностных волн на мелкой воде с учетом сферичности и вращения Земли

3.3. *Коды классификатора, соответствующие содержанию фактически проделанной работы(в порядке значимости):*
01-223 01-207

3.4. *Объявленные ранее цели Проекта:*
Разработка численных алгоритмов для моделирования длинных поверхностных волн в рамках полной и приближенных нелинейно-дисперсионных (НЛД-)моделей, учитывающих сферичность Земли и ее вращение, а также в рамках классической модели мелкой воды на вращающейся сфере.
Разработка адаптивных численных алгоритмов в рамках полной НЛД-модели для исследования поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня пространственно неоднородной формы по пространственно неоднородному склону.
Совершенствование численных алгоритмов для моделирования возникающих при движении оползня поверхностных волн в рамках модели мелкой воды первого приближения и трехмерной модели потенциальных течений жидкости со свободной границей.
Разработка разностных краевых условий на криволинейной подвижной линии уреза, существенно использующих новые локально-аналитические решения в окрестности этой линии уравнений мелкой воды.

3.5. *Степень достижения поставленных в Проекте целей:*
Цели проекта достигнуты, поставленные задачи решены.

3.6. *Полученные в ходе выполнения Проекта важнейшие результаты:*
Для случая сферической геометрии выполнен вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики, не использующий предположение о потенциальности исходного трехмерного течения. Получены слабо дисперсионные нелинейные модели на вращающейся притягивающей сфере, описывающие течения жидкости над неровным подвижным дном. Для полученных моделей найдены законы изменения полной энергии. Разработан единый для всех моделей численный алгоритм, основанный на расщеплении систем нелинейно-дисперсионных уравнений на эллиптическую и гиперболическую части. С использованием разработанных алгоритмов для плановых нелинейно-дисперсионных моделей изучено влияние дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в ограниченных водохранилищах. Выполнено сравнение с численными результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды и модели трехмерных потенциальных течений, а также с имеющимися экспериментальными данными измерений высот волн, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу. Разработанный в рамках модели мелкой воды численный алгоритм метода адаптивных сеток применен для расчета зон затопления в условиях реальной батиметрии прибрежной акватории, реального рельефа суши, прилегающей к линии уреза, и реальной формы набегающей волны. Выполнено сравнение с методом сквозного счета, с аналитическими решениями и экспериментальными данными для плоского откоса.

3.7. *Степень новизны полученных результатов*
Все перечисленные выше важнейшие результаты являются новыми и получены впервые. Вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики на вращающейся сфере впервые выполнен без предположения о потенциальности исходного трехмерного

течения. Впервые получены слабо дисперсионные нелинейные модели типа Буссинеска на сфере, описывающие течения жидкости над неровным подвижным дном и обладающие законом баланса полной энергии. Впервые разработан единый для всех полученных на сфере НЛД-моделей численный алгоритм, основанный на расщеплении систем нелинейно-дисперсионных уравнений на равномерно эллиптическое уравнение для дисперсионной составляющей давления и гиперболическую систему уравнений мелкой воды первого приближения с модифицированным источниковым членом в правой части уравнений импульса.

Новыми являются результаты исследования дисперсионных поверхностных волн, вызванных оползнем пространственно неоднородной формы в «трехмерном» модельном водоеме, а также результаты моделирования наката волн на модельные и реальные участки побережья.

3.8. *Сопоставление полученных результатов с мировым уровнем:*

Все полученные результаты соответствуют мировому уровню исследований в данной области, а в направлении разработки нелинейно-дисперсионных моделей на сфере и реализующих их численных алгоритмов существенно опережают мировой уровень.

3.9. *Методы и подходы, использованные в ходе выполнения Проекта*

В настоящее время для численного моделирования процесса распространения в океанах и морях длинных поверхностных волн используется, как правило, модель мелкой воды, полученная в предположении, что толщина слоя воды мала, вертикальная компонента вектора скорости частиц воды равна нулю, а горизонтальные компоненты не зависят от вертикальной координаты. Новые натурные данные, появившиеся после сильнейших цунами (2004 и 2011 гг.), свидетельствуют о том, что для моделирования распространения волн цунами в ряде случаев требуются более сложные математические модели, способные отражать вертикальную структуру течения, а также учитывать дисперсию волн и эффекты, обусловленные сферичностью и вращением Земли. Исполнителями проекта был выполнен вывод [7] полных нелинейно-дисперсионных уравнений на вращающейся притягивающей сфере, не использующий условие потенциальности исходного трехмерного течения жидкости над подвижным дном и условие малости амплитуды волн. Вывод основан на предварительном масштабировании уравнений Эйлера на сфере и введении малых параметров, позволяющих оценить вклад нелинейности, дисперсии, подвижности дна и эффектов, связанных со сферичностью Земли и ее вращением. Уравнения этой модели имеют следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (H\boldsymbol{u}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(H\boldsymbol{v}\right)_t + \nabla \cdot \left(H\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\right) + g\nabla \frac{H^2}{2} = gH\nabla h + \nabla\varphi - \psi\nabla h + H\boldsymbol{q}\,, \tag{2}$$

где $H = \eta + h$ – полная глубина слоя воды, $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$ – уравнение свободной границы, $r = R - h(\lambda, \theta, t)$ – уравнение подвижного дна, R – средний радиус Земли, $\theta = \pi/2 - \varphi$, λ – долгота, φ – широта, g – ускорение силы притяжения; $\boldsymbol{u} = \left(u^1, u^2\right)$ – средняя по толщине слоя горизонтальная составляющая вектора скорости исходного трехмерного течения, выраженная через контравариантные компоненты, $\boldsymbol{v} = \left(v_1, v_2\right)$ – скорость, записанная через ковариантные компоненты, $v_1 = g_{10} + g_{11}u^1$, $v_2 = g_{22}u^2$; $g_{10} = \Omega R^2 \sin^2\theta$, $g_{11} = R^2 \sin^2\theta$, $g_{22} = R^2$ – ковариантные компоненты метрического тензора вращающейся сферы, Ω – угловая скорость вращения Земли, $\boldsymbol{q} = \left(q_1, q_2\right)$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1/2\left(\Omega + u^1\right)^2 \partial g_{11}/\partial\theta$; $\varphi = H^3 Q_1/3 + H^2 Q_2/2$ – дисперсионная составляющая проинтегрированного по толщине слоя давления, $\psi = H^2 Q_1/2 + HQ_2$ – дисперсионная составляющая давления на дне, $Q_1 = D(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2$, $Q_2 = D^2 h$; $D = \partial/\partial t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla$ $\nabla = (\partial/\partial\lambda, \partial/\partial\theta)$, $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = u^1_\lambda + (u^2 \sin\theta)_\theta / \sin\theta$.

Получены также слабо дисперсионные модели на сфере [18,21] для течений с поверхностными волнами малой амплитуды над подвижным или медленно меняющимся неровным дном, причем структура уравнений этих приближенных НЛД-моделей полностью идентична структуре уравнений (1), (2) полной НЛД-модели с тем лишь отличием, что по-другому выглядят дисперсионные добавки к давлению НЛД-моделей. Так, для слабо дисперсионной модели при конечных деформациях дна имеем

$$\varphi = HhD(h\nabla \cdot \boldsymbol{u})/3 + HhQ_2/2\ ,\ \psi = HD(h\nabla \cdot \boldsymbol{u})/2 + HQ_2\ .$$

Кроме того, для каждой из НЛД-моделей на сфере получено выражение для полной энергии E, вытекающее из вида полной энергии трехмерных уравнений Эйлера при учете условий вывода моделей. Выписаны уравнения баланса полной энергии [4,17], которые можно использовать для верификации численных алгоритмов. Важным обстоятельством является согласованность уравнений баланса энергии приближенных и исходной гидродинамических моделей [7]. Здесь имеется в виду следующее. Если в законе сохранения энергии трехмерной модели использовать разложение компонент скорости по малому параметру, отвечающему за дисперсию, и применить те же упрощающие предположения, при которых были получены уравнения неразрывности и движения НЛД-модели, то мы получаем закон баланса энергии для НЛД-модели. Так, для полной НЛД-модели это уравнение имеет следующий вид:

$$(HE)_t + \nabla \cdot \left[\boldsymbol{u} H \left(E + \frac{p}{H} \right) \right] = -p_0 h_t\ , \qquad (3)$$

где $p = gH^2/2 - \varphi$ – проинтегрированное по толщине слоя жидкости давление НЛД-модели, $p_0 = gH - \psi$ – давление на дне.

С другой стороны, закон баланса энергии (3) может быть получен и путем эквивалентных преобразований самих НЛД-уравнений (1), (2) без привлечения трехмерной модели. Эти два закона для выведенных нами НЛД-моделей совпадают, т.е. эти модели допускают в качестве своего следствия согласованный закон баланса полной энергии. При этом в случае неподвижного дна полученные для сферы уравнения баланса переходят в консервативные законы сохранения, что способствует построению корректных разностных аппроксимаций для численных расчетов.

В качестве дополнительного критерия правильности выведенных НЛД-моделей на сфере использовался прием предельного перехода от сферического случая к плоскому. Установлено, что в бесконечно малой окрестности произвольной точки на вращающейся сфере полученные НЛД-уравнения на сфере переходят при $R \to \infty$ к соответствующим плановым НЛД-уравнениям.

Единая форма записи (1), (2) полной и слабо дисперсионных моделей мелкой воды позволила применить единый подход к построению численных алгоритмов для НЛД-уравнений на вращающейся притягивающей сфере. Уравнение движения НЛД-модели (2) содержит смешанные производные высокого порядка от компонент вектора скорости, непосредственная аппроксимация которых приводит к сложной разностной задаче, не поддающейся исследованию. В настоящем проекте мы использовали расщепление системы (1), (2) на две «простые задачи» аналогично тому, как это делалось в плоском случае [15] для плановых НЛД-уравнений [5,10], в которых эффекты, связанные со сферичностью и вращением Земли, не учитываются. В результате расщепления получается краевая задача для скалярного равномерно эллиптического уравнения относительно дисперсионной составляющей давления φ и начально-краевая задача для системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе бездисперсионных уравнений мелкой воды и отличающейся от последней лишь правой частью.

Алгоритм расчета на произвольном шаге по времени с номером n состоит из двух шагов [8] и аналогичен одному из известных методов решения задач газовой динамики. На шаге предиктор сначала решается конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее равномерно эллиптическое уравнение для φ. Коэффициенты уравнения вычисляются по известным значениям H^n, $\boldsymbol{c}^n$, $\boldsymbol{v}^n$ с n-го слоя по времени. Затем решается гиперболическая система уравнений (1), (2), при этом в правой части уравнения движения, переписанного в недивергентной форме, используются уже известные значения φ^n, ψ^n, H^n и h^n. После этого вновь численно решается уравнение для φ с использованием величин H^*, $\boldsymbol{c}^*$, $\boldsymbol{v}^*$, вычисленных на предикторе. Найденные на этом этапе значения φ^* и ψ^* используются на шаге корректор для определения окончательных значений H^{n+1} и $\boldsymbol{v}^{n+1}$ путем численного решения системы уравнений гиперболического типа (1), (2) с известной правой частью. Для контроля вычислений использовался дискретный аналог уравнения баланса полной энергии (3).

На заключительном этапе выполнения проекта был создан программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы, и на простых тестовых задачах исследовалось влияние дисперсии и вращения Земли на процесс распространения длинных волн в акватории с неподвижным «ровным» дном. Отметим, что для вращающейся сферы наличие центробежной силы приводит к тому, что «ровное» дно не является сферическим и задается уравнением $r = R + \Omega^2 R^2 \sin^2\theta / 2g - h_0$, $h_0 = const$, т.е. форма ровного дна зависит от широты. В качестве начального возвышения свободной границы бралось гауссово возмущение. Установлено, что влияние дисперсии возрастает при уменьшении размеров возмущения, а влияние силы Кориолиса возрастает при увеличении радиуса возмущенной области. Дальность распространения также имеет значение и дисперсионные эффекты проявляются на больших расстояниях даже от крупных источников, а от мелких проявляются почти сразу после распада начального возвышения. Сила Кориолиса заметно влияет на форму распространяющихся волн, делая их форму несимметричной, и способствует образованию вращающихся остаточных смещений свободной границы в месте первоначального расположения источника возмущения. Вычислительные эксперименты на модельных задачах показали, что при реальной скорости вращения Земли центробежная сила не оказывает какого-либо заметного влияния и ее можно не учитывать в задачах распространения волн цунами в океане. Тестовые расчеты показали, что для быстро вращающейся сферы скорость распространения поверхностных волн уменьшается. Подробное описание полученных результатов дано в статье, подготовленной к печати.

Второе направление исследований, запланированных в проекте, связано с изучением оползневого механизма генерации поверхностных волн. Получены [1] новые уравнения движения подводного оползня пространственно неоднородной формы по пространственно неоднородному подводному склону. При этом оползень представляется «квазидеформируемым» объемом сплошной среды, форма поверхности которого меняется в соответствии с встречающимися по ходу движения неровностями склона (как у деформируемого тела), а горизонтальные компоненты вектора скорости одинаковы в каждой точке оползня (как у твердого тела, движущегося поступательно). В полученной модели оползня его масса не меняется, а движение происходит под действием сил тяжести, плавучести, сопротивления воды и трения о дно.

Для случая «одномерного» склона было выполнено [2] численное моделирование генерируемых поверхностных волн в рамках одномерной модели мелкой воды первого приближения, одномерных НЛД-моделей [12] и модели [16,26] потенциальных плоскопараллельных течений жидкости со свободной границей. Тестирование разработанных численных алгоритмов выполнялось на задаче о накате волн на берег водохранилища с параболической формой дна, не зависящей от горизонтальной координаты y. Показано [19], что при использовании модели потенциальных течений и НЛД-модели возникают системы диспергирующих волн. Модель мелкой воды, напротив, дает одиночную волну, которая отражаясь от противоположных берегов может многократно пересекать водоем. Несмотря на отличие волновых картин, воспроизводимых различными математическими моделями, максимальные значения заплесков на берег оказались сопоставимыми в некоторых диапазонах изменения определяющих параметров. Проведен большой цикл вычислительных экспериментов [6,12] по определению того, какие из параметров, (толщина и длина оползня, относительная плотность, коэффициент присоединенной массы, угол трения, коэффициент гидродинамического сопротивления, начальное заглубление оползня) наиболее существенно влияют на величину максимального вертикального заплеска на берег водоема с неровным дном. Результаты численного моделирования подтвердили гипотезу о том, что наибольшую опасность для береговых сооружений представляют волны, генерируемые оползнями с большой массой и малым начальным заглублением.

Аналогичная работа выполнена и для «трехмерных» водоемов. При этом исследовались [22,24] поверхностные волны, возникающие при движении модельного оползня пространственно неоднородной формы по склону модельного водоема с пространственно неоднородной формой дна. Алгоритм расчета в рамках бездисперсионной модели мелкой воды реализован для адаптивных сеток, сгущающихся в окрестности оползня и отслеживающих его движение. Для построения таких сеток использовался модифицированный метод эквираспределения, ориентированный на нестационарные задачи. Алгоритм расчета на основе модели трехмерных потенциальных течений жидкости основан на применении криволинейных подвижных сеток, адаптирующихся к неподвижной непроницаемой криволинейной стенке, которой заменяется береговая линия, и к подвижным поверхностям дна и свободной границы. Алгоритмы расчета на основе НЛД-моделей реализованы для прямоугольных сеток с заменой криволинейных границ ломаными, звенья которых параллельны осям координат. С использованием разработанных алгоритмов изучено [15] влияние дисперсии на картину генерируемых оползнем поверхностных волн в ограниченных водохранилищах. Выполнено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными. Поскольку для криволинейных откосов сведений о таких экспериментах не имеется, то выполнялось сравнение с лабораторными данными о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу. Показано [15,25], что НЛД-модели удовлетворительно описывают большее число волн, чем бездисперсионная модель мелкой воды, в частности, результаты расчетов по НЛД-модели лучше соответствуют экспериментальным данным по значениям локальных экстремумов генерируемых волн. Подготовлена к публикации статья с изложением результатов моделирования поверхностных волн, генерируемых реальным оползнем в акватории с криволинейным очертанием берегов и реальной батиметрией.

Из неопубликованных к настоящему времени интересных результатов отметим полученные на основе вычислительных экспериментов данные о том, что при накате уединенной волны на вертикальную стенку, установленную на плоском откосе, ее заплеск может существенно возрасти, если одновременно с подходом этой волны к стенке туда же приходит волна понижения, вызванная подводным оползнем. Продолжается работа по определению параметров оползня и набегающей уединенной волны (начальное положение вершины, амплитуда), при которых возможен одновременный подход указанных волн и, как следствие, рост заплеска.

Из теоретических результатов, полученных для плановых НЛД-моделей, отметим следующие.

Получено точное решение в виде уединенной волны для слабо дисперсионной модели. Это решение отличается от известного решения для полной НЛД-модели и использовалось нами для тестирования численного алгоритма расчета поверхностных волн в рамках слабо дисперсионной модели мелкой воды.

Выведен закон сохранения потенциального вихря для полной НЛД-модели. Известно, что для уравнений мелкой воды первого приближения характерно наличие вихря даже тогда, когда исходное трехмерное течение предполагается безвихревым, при этом потенциальный вихрь (завихренность, поделенная на полную глубину) сохраняется вдоль траекторий жидких частиц. Аналогичный закон получен [10] и для уравнений второго гидродинамического приближения. Для бездисперсионных уравнений мелкой воды закон сохранения потенциального вихря использован в численном алгоритме расчета в переменных «функция тока-вихрь» установившихся течений жидкости со свободной границей в модельном водохранилище со сложной геометрией береговой линии. Продолжается работа по адаптации этого алгоритма для расчета нестационарных течений, в том числе и в рамках полной НЛД-модели.

Третье направление исследований, предусмотренное общим планом работ по проекту, связано с задачами наката волн на берег. Это направление интенсивно развивается во всем мире, о чем свидетельствует неуклонный рост публикаций в журналах и трудах конференций, посвященных задачам наката. Однако проблема адекватного описания волны цунами в зоне заплеска и надежного определения границ затопления суши методами численного моделирования остается до сих пор нерешенной, хотя подходов к оценке зон затопления предложено уже немало.

В настоящее время наибольшее распространение для расчета зон затопления при выходе волны цунами на берег получили конечно-разностные и конечно-элементные методы сквозного счета. В ряде работ линия уреза заменялась вертикальной стенкой, установленной на некоторой глубине, и по вертикальным заплескам на нее приближенно определялся горизонтальный проход волны на сушу. В последнее время выросло число работ, в которых используется методика разделения области распространения цунами на две части: вдали от берега используется метод конечных элементов или метод конечных объемов на грубых сетках, а в ближней зоне, зоне прибрежной полосы, используются те же методы, но на детальной, измельченной сетке. Появились работы, в которых активно прорабатывается методика, согласно которой распространение волны цунами вдали от берега моделируется численно, а накат считается по приближенным аналитическим формулам, полученным для плоского откоса.

Есть и другой подход, которого мы и придерживались в настоящем проекте – счет с выделением линии уреза, т.е. счет в области с подвижной границей. В этом подходе область течения покрывается подвижной сеткой, одна из крайних координатных линий которой совпадает с подвижной линией уреза, движущейся по береговому откосу в сторону суши при накате волн и в сторону моря – при откате. Положение границы вода-суша определялось с использованием в окрестности линии уреза точных аналитических решений уравнений мелкой воды на временном промежутке, равном шагу по времени разностной схемы предиктор-корректор.

Эта схема является базовой при моделировании поверхностных волн как в рамках бездисперсионной модели мелкой воды, так и на основе НЛД-моделей, как в плановой постановке, так и в сферической геометрии. Поэтому на всех этапах выполнения проекта выполнялось постоянное совершенствование схемы как на равномерных, так и на динамически адаптивных сетках [3,23]. Выработаны практические рецепты преодоления трудностей, возникающих при решении многомерных задач на адаптивных сетках [9]. Указан [11,20,27] выбор схемных параметров, при котором сохраняется монотонность численного решения. Выведен геометрический закон сохранения в разностной форме и доказано выполнение разностного аналога геометрического закона сохранения при использовании схемы предиктор-корректор, что гарантирует сохранение ею постоянной функции. Рассмотрены особенности построения сеток, адаптирующихся к разрывным решениям [3], и предложена [13] модификация классического метода эквираспределения построения подвижных сеток, позволяющая избежать возникновения осцилляций траекторий узлов и резкого изменения площадей соседних ячеек сетки [9]. Проведено сравнение результатов решения тестовых задач с гладким и разрывным решениями на неподвижных и динамически адаптивных сетках. Показано, что разработанная схема предиктор-корректор обеспечивает монотонность численного решения, а на адаптивной подвижной сетке поверхность разрыва передается существенно лучше, чем на неподвижной «квазиравномерной» сетке. С помощью метода дифференциального приближения дано новое объяснение механизма возникновения нефизичных численных решений в задаче Римана с точным решением в виде волны разрежения, причиной появления которых оказалась отрицательная аппроксимационная вязкость в зоне волны разрежения. Предложена [13] новая процедура энтропийной коррекции разностной схемы, основанная на анализе ее первого дифференциального приближения.

Результаты выполненных методических исследований существенно использовались при построении численных алгоритмов для решения задач наводнения-осушения. Поскольку при решении таких задач динамически адаптивная сетка должна перестраиваться при переходе с одного временного слоя на другой, то временные затраты на ее построение начинают существенно превосходить затраты на решение самих разностных уравнений явной схемы предиктор-корректор. Для сокращения таких затрат мы применяли следующий прием. В расчетах использовались две криволинейные сетки. Первая, называемая базовой, строилась заранее, до решения задачи, она покрывала акваторию и часть прилегающей к ней суши. При этом крайняя координатная линия сетки проходила по суше на достаточном удалении от начальной линии уреза, на удалении, гарантирующем, что при накате волна никогда не дойдет до этой линии. Вторая сетка, называемая расчетной, строилась на каждом шаге по времени, адаптировалась к решению, к подвижной линии уреза, но была в некотором смысле «одномерной», поскольку ее узлы не могли перемещаться произвольным образом в двух направлениях, а могли двигаться только вдоль координатных линий одного семейства базовой сетки. Их положение определялось путем решения одномерных уравнений метода эквираспределения для построения сетки на плоских кривых.

Такой подход решения плановых задач наката-отката применялся для определения зон затопления при накате волн цунами на берег со слабо искривленной линией уреза. Для плоского откоса результаты расчетов сравнивались с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными. Сравнение численных результатов с аналитическими решениями в той области параметров, в которой эти решения справедливы, показало, что численные результаты хорошо согласуются с точными решениями. По результатам вычислительных экспериментов установлено, что в задачах наката замена криволинейного откоса на плоский может привести к большим погрешностям при определении зоны затопления. Сильно различаются также картины взаимодействия волны с берегом. После наката волны на плоский откос, она скатывается с него с образованием основной отраженной волны. Для криволинейного же склона отраженная волна возникает в момент времени, когда на суше еще продолжается накат, и во время пребывания воды на пологом криволинейном склоне возникает несколько отраженных волн, чего не наблюдалось для плоских откосов.

Для сильно изрезанной береговой линии описанный алгоритм расчета наката переставал работать. Это происходило, в частности, в том случае, когда односвязная область, занятая водой, превращалась в многосвязную за счет образования в процессе затопления отдельных островов. Для преодоления этих трудностей был разработан [14] комбинированный метод численного моделирования наката длинных волн на побережье, основанный на использовании модели мелкой воды в двух приближениях: одномерном и двумерном. Вначале по двумерной модели с отражающим краевым условием на берегу рассчитывается распространение волны от источника землетрясения к побережью. Во время расчета ведется непрерывная запись параметров волн на изобате, расположенной на удалении от берега, достаточном для минимизации влияния отраженных волн на форму главной части падающей волны. Эти данные берутся затем в качестве краевых условий для одномерных расчетов вдоль сечений, проведенных от этой изобаты в сторону берега. На основе таких одномерных расчетов вычисляются значения вертикального наката (высоты) и горизонтального заплеска (дальности) вдоль выбранных сечений. Разработана процедура восстановления границы затопления суши по результатам решения одномерных задач, использующая подробный цифровой рельеф суши.

Для расчета наката в одномерных сечениях использовалось два метода: метод сквозного счета и метод с выделением линии разрыва (метод адаптивных сеток), в котором численное моделирование движения точки уреза выполнялось на основе полученного аналитически закона движения этой точки. Разработанная методика применялась для расчета зон затопления многих участков побережья и показала [14] удовлетворительное согласование численных результатов с данными натурных наблюдений.

3.10 Количество научных работ, опубликованных в ходе выполнения проекта:

27

Из них включенных в перечень ВАК:

15

Из них включенных в системы цитирования (Web of science):

5

Количество научных работ, подготовленных в ходе выполнения проекта и принятых к печати в 2014 г.

2

Адреса ресурсов в Internet, подготовленных авторами по данному проекту

http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/145802/152444/Khakimzyanov_MIT2013.pdf
http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146812/151531/Paper-MIT-2013.pdf
http://conf.nsc.ru/files/conferences/MIT-2013/fulltext/146044/154858/Shokina_MIT2013.pdf
http://www.cmwr14.de/images/bookofabstracts/CMWR14BookofAbstracts.pdf
http://jahrestagung.gamm-ev.de/images/erlangen/PDFs/Book%20of%20Abstracts.pdf

Библиографический список всех публикаций по проекту за весь период выполнения проекта, предшествующий данному отчету, в порядке значимости: монографии, статьи в научных изданиях, тезисы докладов и материалы съездов, конференций и т.д.

1. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558.
2. Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690-699.
3. Shokina N.Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 603-626.
4. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. Vol. 55, No. 3. P. 404-416.
5. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3. P. 167-178.
6. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Оценка высот волн, вызванных подводным оползнем в ограниченном водоеме // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 67-78.
7. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере и выполнение законов сохранения // ПМТФ. 2014. Т.

55, № 3. С. 37-50.

8. Гусев О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 46-64.

9. Соммер А.Ф., Шокина Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на двумерных подвижных сетках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 4. С. 88-108.

10. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94-108.

11. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 78-98.

12. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90.

13. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 54-79.

14. Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 1. С. 40-62.

15. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Шокина Н.Ю. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. С. 121-133.

16. Бабчик Д.В., Максимов В.В., Нуднер И.С., Семёнов К.К., Хакимзянов Г.С. Численное и экспериментальное исследование взаимодействия периодических волн с откосным сооружением сложного профиля // Труды XI Всероссийской конференции "Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики". Санкт-Петербург: Наука, 2012. С. 198-200.

17. Гусев О.И., Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные модели мелкой воды на вращающейся сфере и алгоритмы расчета // V Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”. Бийск, 29 июня - 4 июля, 2014. Тезисы докладов. Бийск: Изд-во Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова, 2014. С. 32-33.

18. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные модели волновой гидродинамики на сфере и законы сохранения // In: Zbornic radova konferencije MIT 2013. Beograd, 2014. pp. 183-190.

19. Гусев О.И., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Моделирование дисперсионных волн, генерируемых подводным оползнем в ограниченном водохранилище // In: Zbornic radova konferencije MIT 2013. Beograd, 2014. pp. 275-284.

20. Шокина Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на подвижных сетках // In: Zbornic radova konferencije MIT 2013. Beograd, 2014. pp. 589-597.

21. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Hierarchy of models of long wave hydrodynamics // Abstacts. International conference “Advanced Mathematics, Computations & Applications-2014”. Novosibirsk, Russia, June 8-11, 2014. Novosibirsk: Academizdat, 2014. P 78-79.

22. Gusev O.I. Simulation of tsunami wave generation by submarine landslide using the fully nonlinear dispersive equations // Abstacts. International conference “Advanced Mathematics, Computations & Applications-2014”. Novosibirsk, Russia, June 8-11, 2014. Novosibirsk: Academizdat, 2014. P 92.

23. Shokina N. Some notes on monotonicity preserving schemes on adaptive grids // 84th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), Erlangen, Germany, March 10-14, 2014. http://jahrestagung.gamm-

ev.de/images/erlangen/PDFs/Book%20of%20Abstracts.pdf

24. Shokina N. On numerical modelling of surface waves generated by movement of underwater landslides // The XX. International Conference on Computational Methods in Water Resources, Stuttgart, Germany, June 10-13, 2014. http://www.cmwr14.de/images/bookofabstracts/CMWR14BookofAbstracts.pdf

25. Гусев О.И. Использование плановой нелинейно-дисперсионной модели в задачах о генерации цунами подводными оползнями // Материалы 52-ой Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс. Математика». 11-18 апреля 2014, Новосибирск. Новосибирск: НГУ, 2014. С. 127.

26. Мартемьянычева Я.Е. Математическое моделирование воздействия поверхностных волн на подвижные волнозащитные стенки // Материалы 52-ой Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс. Математика». 11-18 апреля 2014, Новосибирск. Новосибирск: НГУ, 2014. С. 142.

27. Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. Методы вычислений: Часть 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. – 207 с.

3.11 *Участие в 2014 году в научных мероприятиях по тематике Проекта*

Всероссийский семинар, посвященный памяти чл.-корр. РАН В.М. Тешукова. Новосибирск: ИГиЛ СО РАН, 3 марта 2014 г.

84th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM). Erlangen, Germany, March 10-14, 2014.

52-ая Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс». 11-18 апреля 2014, Новосибирск

International conference “Advanced Mathematics, Computations & Applications-2014”. Novosibirsk, Russia, June 8-11, 2014.

The XX. International Conference on Computational Methods in Water Resources. Stuttgart, Germany, June 10-13, 2014.

V Всероссийская конференция с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”. Бийск, 29 июня - 4 июля, 2014.

3.12 *Участие в экспедициях по тематике проекта, проводимых при финансовой поддержке Фонда*

3.13. *Финансовые средства, полученные от РФФИ*

Финансовые средства, полученные в 2014 году от РФФИ

315000

Финансовые средства, полученные в 2013 году от РФФИ

310000

Финансовые средства, полученные в 2012 году от РФФИ

375000

3.14 *Приоритетное направление развития науки, технологий и техники РФ, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*

6 - Рациональное природопользование

3.15 *Критическая технология РФ, которой, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*

19 - Технологии мониторинга и прогнозирования состояния окружающей среды, предотвращения и ликвидации ее загрязнения

3.16 *Основное направление технологической модернизации экономики России, которому, по мнению исполнителей, соответствуют результаты данного проекта*

Аннотации основных публикаций

1. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Некоторые замечания о схемах, сохраняющих монотонность численного решения // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 78-98.

Рассмотрена процедура монотонизации явных двухслойных схем с помощью специального схемного параметра, выбор которого основывается на исследовании дифференциальных приближений схем. Подробно рассмотрен вопрос о влиянии постоянного, «квазипостоянного» и переменного схемного параметра на монотонность двухслойных разностных схем. Для постоянного схемного параметра построен пример схемы с отсутствием дисперсии в решении второго дифференциальном приближении, но не сохраняющей монотонность численного решения. Приведен пример схемного параметра, при котором явная двухслойная схема на подвижной неравномерной сетке является монотонной. Подчеркнута связь согласованной аппроксимации якобиана и скоростей движения узлов сетки с геометрическим законом сохранения. Предложен новый подход к построению дивергентных схем на подвижных сетках.

Кроме того, рассмотрены особенности построения сеток, адаптирующихся к разрывным решениям. Некоторые из этих особенностей продемонстрированы на примере метода эквираспределения. Приведены примеры, связанные с разрешимостью уравнений для сетки и качеством адаптации сетки к решению. Многие схемы, сохраняющие монотонность численного решения, дают на разрывных решениях осциллирующие профили разностных производных, что может негативно сказаться при использовании метода адаптивных сеток: если управляющая функция, регулирующая расстановку узлов, зависит от разностных производных, а они осциллируют, то адаптивная сетка будет иметь чередования длинных и коротких ячеек, что приведет к потере точности численного решения. Осциллирование разностных производных численного решения может быть вызвано, в частности, и «нефизичным»' ростом количества экстремумов решения при переходе с одного шага по времени на другой. На примере схемы предиктор-корректор с постоянными коэффициентами показано, что даже TVD-схемы могут увеличивать количество экстремумов.

Для устранения проблем, связанных с резкими изменениями значений управляющей функции, предлагается использовать процедуру неявного сглаживания управляющей функции, после применения которой в окрестность разрыва попадает большее количество узлов и происходит плавное изменение длин соседних ячеек, что способствует лучшему воспроизведению решений с разрывами. Приведены примеры, показывающие преимущества метода адаптивных сеток.

2. Соммер А.Ф., Шокина Н.Ю. О некоторых проблемах конструирования разностных схем на двумерных подвижных сетках // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 4. С. 88-108.

В последние годы большое распространение получили алгоритмы решения задач наводнения-осушения на основе метода конечных элементов Тем не менее, для таких задач продолжает оставаться актуальной проблема разработки новых и совершенствования существующих конечно-разностных методов, в частности, разностных схем на адаптивных сетках, так как на их основе тоже можно получать вполне адекватное представление о картине волновых процессов в областях с криволинейной формой подвижных границ.

Использование подвижных сеток, адаптирующихся к решению, может приводить к заметному повышению точности расчета. Однако решать задачу на адаптивной сетке значительно сложнее, чем на равномерной, поскольку при применении адаптивных сеток приходится кроме основных уравнений задачи дополнительно решать нелинейные уравнения для определения координат узлов, причем для нестационарных задач уравнения для сетки необходимо решать на каждом временном шаге. При конструировании схем на адаптивных сетках возникают и другие трудности, на которые в публикациях, как правило, не обращается внимания. В настоящей работе описываются практические рецепты преодоления такого рода трудностей.

Основное внимание в ней уделяется тем вопросам, которые не были затронуты в предыдущих публикациях или были недостаточно подробно освещены. Приводится, в частности, конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации на адаптивной сетке, выводится геометрический закон сохранения в разностной форме, рассматриваются особенности построения сеток, адаптирующихся к разрывным решениям, обсуждаются реализации краевых условий на подвижной сетке.

3. Shokina N.Yu. To the problem of construction of difference schemes on movable grids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 603-626.

В данной работе схема предиктор–корректор, исследованная ранее для одномерного линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом, обобщена для двумерного линейного уравнения переноса с переменными коэффициентами. К наиболее значимым результатам работы относятся следующие.

Описан способ аппроксимации контравариантных компонент скорости, гарантирующий выполнение уравнения неразрывности для сеточных функций на подвижных криволинейных сетках. Указан выбор схемных параметров, при котором сохраняется монотонность численного решения.

Доказано выполнение разностного аналога геометрического закона сохранения, что гарантирует сохранение схемой предиктор-корректор постоянной функции.

Предложена модификация классического метода эквираспределения построения подвижных сеток, позволяющая избежать возникновения осцилляций траекторий узлов и резкого изменения площадей соседних ячеек сетки. Указан метод построения сетки на границе подвижной области. Для решения проблем, связанных с разрешимостью уравнений для сетки и с адаптацией сетки к разрывному решению, предложено использование неявной процедуры двумерного сглаживания управляющей функции.

Приведено сравнение результатов решения тестовых задач с гладким и разрывным решениями на неподвижных и динамически адаптивных сетках.

Результаты, полученные в данной работе для двумерного линейного уравнения переноса с переменными коэффициентами, имеют общий характер и могут быть использованы для численного решения задач наводнения-осушения в рамках модели мелкой воды.

4. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94-108.

При более слабых, чем в работе Green A.E., Naghdi P.M. (J. Fluid Mech. 1976), ограничениях на скорость трехмерного вихревого течения жидкости над подвижным дном выведена система нелинейно-дисперсионных (НЛД) уравнений мелкой воды для приближенного описания течений со свободной границей. Система НЛД-уравнений получена путем введения малого параметра и разложения компонент скорости в ряды по этому параметру. Определены порядки аппроксимации основных гидродинамических величин и уравнений, реализованные при переходе от пространственной модели к приближенной. К наиболее значимым результатам относятся полученные для нелинейно-дисперсионной модели закон изменения полной энергии при движении жидкости со свободной границей над подвижным дном и закон изменения потенциального вихря для такого течения жидкости.

5. Гусев О.И. Об алгоритме расчета поверхностных волн в рамках нелинейно-дисперсионной модели на подвижном дне // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 46-64.

Настоящая работа посвящена численной реализации полной НЛД-модели. Проведено расщепление системы полных нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды, учитывающих подвижность дна, на эллиптическую и гиперболическую части. Описан конечно-разностный алгоритм решения расщеплённой системы. На ряде модельных задач выполнено сравнение численного решения с аналитическим решением задач о распространении поверхностных волн над ровным дном, с экспериментальными данными, результатами расчетов на основе бездисперсионной (классической) модели мелкой воды и полной гидродинамической модели. На основе сравнений обсуждается важность учёта дисперсионных свойств, а также оцениваются диапазоны изменения параметров, характеризующих движущийся оползень, для которых разработанная НЛД-модель даёт удовлетворительное соответствие с полной гидродинамической моделью.

6. Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Evaluation of the height of waves generated by an underwater landslide in a confined water reservoir // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53, No. 5. P. 690-699.

В рамках нелинейной модели мелкой воды выполнено численное моделирование поверхностных волн, генерируемых при движении оползня по неровному дну водохранилища. Исследовано влияние размеров оползня, плотности материала оползня, коэффициентов трения, сопротивления и присоединенной массы на величину максимального заплеска порожденных оползнем волн на берега водоема с параболической формой дна.

7. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Оценка высот волн, вызванных подводным оползнем в ограниченном водоеме // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 5. С. 67-78.

При выводе уравнения движения оползня в работе (Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну // Вычислительные технологии. 2010. Т.15, N.1. С. 105-119) предполагалось, что форма оползня и форма подводного склона зависят лишь от одной пространственной координаты и неизменны во втором направлении. Однако способ вывода этого уравнения не удалось обобщить на случай движения подводного оползня пространственно неоднородной формы по пространственно неоднородному подводному склону. Допускающее такое обобщение уравнение движения оползня по «одномерному» неровному склону произвольной формы выведено в настоящей работе.

8. Beisel S.A., Chubarov L.B., Dutykh D., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide in a bounded reservoir // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. Vol. 27, No. 6. P. 539-558.

Важность учета оползневого механизма генерации поверхностных волн при исследовании катастрофических явлений в акваториях различного масштаба не вызывает сомнений. Этот механизм имел место, например, при генерации цунами вблизи Папуа-Новой Гвинеи в 1998 г. В кругу специалистов существуют гипотезы о заметном влиянии оползневых эффектов при формировании мегацунами 2004 г. (Суматра) и 2011 г. (Тохоку, Япония).

В последние годы были предприняты попытки экспериментального изучения поверхностных волн, возникающих при движении твердой модели оползня по плоскому подводному склону. Ряд работ посвящен численному моделированию такой задачи с использованием закона движения твердого оползня по плоскому откосу. Моделирование реальных ситуаций требует учета неровности подводного склона. В работе (Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Численное моделирование поверхностных волн, возникающих при движении подводного оползня по неровному дну // Вычислительные технологии. 2010. Т.15, N.1. С. 105-119) предложено уравнение движения оползня по неровному склону с учетом сил тяжести, плавучести, трения и сопротивления воды. При выводе уравнения движения оползня предполагалось, что оползень и подводный склон являются «одномерными», т.е. их форма зависит лишь от одной из пространственных координат и неизменна во втором пространственном направлении. Численное исследование частных случаев (Beisel S.A., Chubarov L.B., Khakimzyanov G.S. Simulation of surface waves generated by an underwater landslide moving over an uneven slope // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2011. Vol. 26, No. 1. P. 17-38) показало, что при движении оползня по неровному дну картина генерируемых поверхностных волн существенно отличается от той, которая возникает в случае плоского откоса.

В настоящей работе излагается вывод уравнений в общем случае движения подводного оползня пространственно неоднородной формы по пространственно неоднородному подводному склону. При этом оползень представляется «'квазинедеформируемым»' объемом сплошной среды, форма поверхности которого меняется в соответствии с встречающимися по ходу движения неровностями склона (как у деформируемого тела), а горизонтальные компоненты вектора скорости одинаковы в каждой точке оползня (как у твердого тела, движущегося поступательно).

9. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. Energy equation for certain approximate models of long-wave hydrodynamics // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3. P. 167-178.

Дан новый вывод нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики без предположения о потенциальности течения. Кроме полностью нелинейных НЛД-уравнений, выведены приближенные слабо нелинейные уравнения типа Буссинеска, сохраняющие основные свойства полных НЛД-уравнений. Речь идет о законах сохранения массы, импульса, полной энергии – тех свойствах, которые в первую очередь присущи трехмерным уравнениям гидродинамики и могут быть утеряны при их упрощении. Показано, что для всех полученных НЛД-моделей выполняется баланс полной энергии. Полученные НЛД-уравнения могут применяться при численном моделировании распространения длинных волн в акваториях, в частности, для случаев, связанных с изменением дна (оползни). Наличие у полученных НЛД-моделей свойств, связанных с законами сохранения, позволяет осуществлять контроль точности численных алгоритмов.

10. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Шокина Н.Ю. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. С. 121-133.

Особенность моделирования поверхностных волн, порожденных движением подводного оползня, определяется тем, что эти волны зарождаются в прибрежной зоне с малой глубиной, меньшей, чем длины генерируемых волн, поэтому приемлемое описание исследуемых волновых режимов, особенно в начальной стадии процесса, может дать модель мелкой воды. Нелинейно-дисперсионные (НЛД-) модели лучше воспроизводят волновую картину, чем классические (бездисперсионные) уравнения мелкой воды, поскольку в НЛД-уравнениях гидродинамики учитывается дисперсия волн и в некоторой степени неоднородность процесса в вертикальном направлении. В настоящей работе используется полная НЛД-модель, выведенная (*Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. RJNAMM. 2014*) из уравнений Эйлера с учетом подвижности дна и без предположений о малости амплитуды и о потенциальности исходного трехмерного течения несжимаемой жидкости со свободной границей. Предлагается метод расщепления, сводящий сложную задачу для НЛД-уравнений к двум более простым: к системе уравнений гиперболического типа и к скалярному уравнению эллиптического типа для осредненной по глубине дисперсионной составляющей давления. Приведены некоторые результаты расчетов с использованием НЛД-модели, которые сравниваются с результатами, полученными по бездисперсионной модели мелкой воды, а также с известными лабораторными данными о волнах, возникающих при движении твердых тел по плоскому подводному откосу.

11. Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74-90.

Исследуется влияние дисперсии на картину поверхностных волн, возникающих при сходе подводного оползня в ограниченном водоеме. Для описания поверхностных волн используются как полная нелинейно-дисперсионная модель мелкой воды, так и новые приближенные модели типа Буссинеска (*Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. RJNAMM. 2014*) для волн, генерируемых оползнями малой высоты или медленно сползающими оползнями. Разработан единый для всех моделей подход к построению численных алгоритмов, основанный на аппроксимации расширенной системы уравнений, состоящей из уравнения эллиптического типа для негидростатической составляющей давления и системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды первого приближения. Показано, что учет дисперсии волн существенно влияет на волновую картину. Путем сопоставления численных результатов, полученных в рамках бездисперсионной модели мелкой воды, нелинейно-дисперсионных моделей и модели потенциальных течений со свободной границей обозначены области применимости как полной, так и приближенных НЛД-моделей.

12. Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2014. Vol. 55, No. 3. P. 404-416.

В настоящей работе дан вывод нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере, не использующий условие потенциальности исходного трехмерного течения. Получены новые модели типа Буссинеска на сфере для течений над подвижным или медленно меняющимся неровным дном, причем структура уравнений этих НЛД-моделей полностью сохраняет структуру исходной НЛД-модели, что позволит применить в дальнейшем единый подход к построению численных алгоритмов для выведенных здесь полной и слабо-дисперсионных моделей на сфере.

Для каждой из НЛД-моделей получено выражение для полной энергии, вытекающее из вида полной энергии уравнений Эйлера при учете условий вывода моделей. Выписаны уравнения баланса полной энергии, являющиеся следствием полученных НЛД-уравнений и имеющие важное значение для верификации численных алгоритмов. Важным обстоятельством является согласованность уравнений баланса энергии приближенных и исходной гидродинамических моделей, выражающаяся в том, что каждое из выведенных уравнений баланса энергии получается также и из закона сохранения энергии трехмерных уравнений Эйлера на сфере при том же порядке аппроксимации, при котором соответствующая приближенная модель аппроксимирует модель трехмерных течений.

Необходимо также отметить лаконичную форму записи полученных уравнений баланса на сфере, которые в случае неподвижного дна переходят в консервативные законы сохранения, что способствует построению корректных разностных аппроксимаций для численных расчетов.

13. Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Метод адаптивных сеток для одномерных уравнений мелкой воды // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 3. С. 54-79.

Для нелинейного скалярного уравнения выписана дивергентная схема предиктор-корректор, сохраняющая монотонность численного решения на адаптивных сетках. Предложен новый подход для получения любых явных двухслойных дивергентных схем на подвижных сетках, например, противопоточной схемы, основанный на выборе схемного параметра по формулам, связанным с каждой конкретной схемой. С помощью метода дифференциального приближения дано новое объяснение механизма возникновения нефизичных численных решений в задаче Римана, причиной появления которых оказалась отрицательная аппроксимационная вязкость в волне разрежения. Предложена новая процедура энтропийной коррекции разностной схемы, основанная на анализе ее первого дифференциального приближения. Приведен пример TVD-схемы, которая может увеличивать количество экстремумов численного решения при переходе с одного шага по времени на другой. Установлено, что предложенная здесь схема предиктор-корректор количество экстремумов не увеличивает. Исследованы свойства сохранения схемой предиктор-корректор постоянного решения и разрывных решений задачи Римана в виде стационарного скачка на неподвижной сетке и движущегося скачка на подвижной сетке. Результаты обобщены на случай одномерных

уравнений мелкой воды. На примере численного решения задачи о разрушении плотины продемонстрированы преимущества использования подвижных адаптивных сеток и предложенной энтропийной коррекции схемы.

14. Бейзель С.А., Шокина Н.Ю., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О некоторых численных алгоритмах расчета наката волн цунами в рамках модели мелкой воды. I. // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 1. С. 40-62.

Представлен метод численного моделирования наката волн цунами на побережье, основанный на использовании модели мелкой воды в двух приближениях: одномерном и двумерном. Вначале по двумерной модели с отражающим краевым условием на берегу рассчитывается распространение волны от источника к побережью. Параметры течения на некоторой изобате, полученные из этого расчета, используются затем в качестве краевых условий для одномерного моделирования наката вдоль различных сечений, проведенных от этой изобаты до выбранной изолинии на суше. Выполнено сравнение трех численных методов для расчета наката вдоль сечений: сквозного счета и с выделением линии разрыва на основе классической модели мелкой воды и конечно-разностного метода, основанного на модели мелкой воды с модифицированным уравнением импульса. Описана процедура восстановления границы затопления суши по результатам решения одномерных задач. Изложенная авторами методика применялась для расчета зон затопления многих участков побережья и показала удовлетворительное согласование численных результатов с данными натурных наблюдений Японского цунами 2011 года.