

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАКАТА ВОЛН ЦУНАМИ

Ю.И. Шокин, А.Д. Рычков, Г.С. Хакимзянов, Л.Б. Чубаров

Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия
chubarov@ict.nsc.ru

В настоящее время применяются различные численные методы для моделирования в рамках теории мелкой воды наката волн цунами. Условно их можно разделить на три класса – безсеточные методы сглаженных частиц (SPH – методы), методы конечных разностей и конечных элементов и комбинированные методы типа методов частиц в ячейках, более приспособленные для расчета линии раздела воды и суши (линии уреза), чем конечно-разностные методы. Обзор ряда таких методов, позволяющих вполне адекватно описывать основные характеристики наката длинных поверхностных волн на берег в одномерных постановках, приведен в монографии [2]. В работе [6] предложен оригинальный численный метод, использующий неравномерную подвижную разностную сетку и аналитическое решение задачи для расчета положения точки наката волны на откос. К сожалению, распространить этот метод на решение двумерных задач не представляется возможным, однако он может быть использован для сопоставления с другими методами в одномерных задачах. Рассмотренные алгоритмы характеризуются значительным разбросом по важному соотношению «точность-ресурс-трудоемкость». Остаются нерешенными также вопросы, связанные с повышением точности определения зон затопления и расчетов вторичных волн.

В докладе рассматриваются несколько методов, хорошо проявивших себя при решении задач газовой динамики и, на наш взгляд, пригодных для решения задач о накате волн цунами, – метод крупных частиц, который применительно к решению уравнений мелкой воды изложен в [1, 5, 7], метод типа Годунова с TVD свойствами [2], метод сглаженных частиц (SPH) [8] и комбинированный метод (TVD+SPH) [4]. Приводятся результаты исследования сходимости этих методов на модельных задачах, демонстрируются их возможности в моделировании процессов, характерных для наката волн цунами на берег.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В декартовой системе координат Oxz с вертикальной осью Oz , направленной вверх, и координатной линией $z = 0$, совпадающей с невозмущенной свободной поверхностью, система уравнений мелкой воды, записанная в виде законов сохранения, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{G}; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + \frac{g}{2} H^2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gH \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $H(x, t) = \eta(x, t) + h(x) \geq 0$ и $u(x, t)$ – полная глубина слоя жидкости и скорость, осреднённая по вертикали от дна $Z = -h(x)$ до свободной поверхности $Z = \eta(x, t)$ соответственно; g – ускорение силы тяжести. Рельеф дна и прилегающей суши задавался функцией

$$z = -h(x) = \begin{cases} z_0 - x \operatorname{tg} \alpha, & \text{при } 0 \leq x \leq x_s, \\ -h_0, & \text{при } x_s \leq x \leq L_x, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ – угол наклона откоса, $z_0 > 0$ – высота суши в точке $x = 0$, $x_s = (z_0 + h_0) \operatorname{ctg} \alpha$ – абсцисса основания склона, L_x – длина канала (волна движется справа налево).

Начальные данные – возвышение свободной поверхности $\eta(x, 0)$ и скорость $u(x, 0)$ задавались над участком дна постоянной глубины:

$$\eta(x,0) = \frac{A}{ch^2(Z)}, \quad Z = \sqrt{\frac{3A}{4(h_0 + A)}} \cdot \frac{(x - x_w)}{h_0}, \quad u(x,0) = -\frac{\eta(x,0)\sqrt{g(h_0 + A)}}{h_0 + \eta(x,0)}, \quad (3)$$

где A – амплитуда начального возмущения, x_w – начальная координата максимального смещения свободной поверхности $x_w \gg x_s$.

Для численного решения в области $x \in [0, L_x]$ строилась равномерная разностная сетка с шагом Δx , на которой система (1) решалась только в тех узлах сетки, где выполнялось условие $H_i^n \geq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ – заданная пороговая величина). В остальных узлах сетки все параметры течения полагались равными нулю. На новом $n + 1$ -м временном слое производился анализ вычисленных значений H_i^{n+1} , и если в некотором узле x_q имело место $H_i^{n+1} < \varepsilon$, то значения всех параметров при $x_i < x_q$ также полагались равными нулю. Такой подход известен в литературе как метод улавливания в узел разностной сетки подвижной границы (точки уреза) $x = x_0(t)$, отделяющей воду от суши. В самой точке уреза расчет проводился с использованием односторонних разностей по пространственной переменной и определялось значение x_q^{n+1} – приближенное значение положения точки уреза на $n + 1$ -м временном слое. На правой границе области либо задавалось условия непротекания ($u = 0$), либо в течение некоторого промежутка времени задавались амплитуда и скорость входящей волны: $\eta(L_x, t)$ и $u(L_x, t) < 0$.

МЕТОД КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Реализация метода крупных частиц проводится в два этапа. На первом (эйлеровом) этапе в системе она записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ gH \frac{\partial(H - h)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

на втором (лагранжевом) этапе решаются уравнения, полученные из (1) хранены только конвективные члены

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

Для решения уравнений (4), (5) строится явная разностная схема первого порядка точности на разнесенной сетке, что обеспечивает, как показали расчеты, отсутствие осцилляций численного решения. В основных узлах определялась величина H , в сдвинутых – поток (Hu) . Разностная схема первого этапа записывается следующим образом:

$$\tilde{H}_i = H_i^n, \quad (\tilde{H}\tilde{u})_{i+1/2} = (Hu)_{i+1/2}^n - gH_{i+1/2}^n \Delta t ((H - h)_{i+1}^n - (H - h)_i^n) / \Delta x,$$

где целый индекс относится к узлам основной сетки, дробный – к сдвинутым. На втором этапе для уравнений (5) используется противопоточная разностная схема:

$$H_i^{n+1} = \tilde{H}_i - \Delta t (\tilde{q}_{i+1/2} - \tilde{q}_{i-1/2}) / \Delta x, \quad \tilde{u}_{i+1/2} = 2(\tilde{H}\tilde{u})_{i+1/2} / (\tilde{H}_{i+1} + \tilde{H}_i), \quad \tilde{q}_{i+1/2} = \begin{cases} \tilde{H}_i \tilde{u}_{i+1/2}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1/2} \geq 0, \\ \tilde{H}_{i+1} \tilde{u}_{i+1/2}, & \text{если } \tilde{u}_{i+1/2} < 0. \end{cases}$$

Аналогичным образом записываются выражения для вычисления значений $(Hu)_{i+1/2}^{n+1}$. Достоинством метода является устойчивость к неточности задания рельефа дна, выполнение условия «спокойной воды», отсутствие нефизических осцилляций численного решения, простота программирования и нетребовательность к вычислительным ресурсам. Основным недостатком метода является его первый порядок точности. Однако при решении двумерных задач этот недостаток частично компенсируется тем, что приходится использовать достаточно подробную прямоугольную разностную сетку для детальной аппроксимации береговой линии, рельефов суши и дна акватории.

МЕТОД ТИПА ГОДУНОВА С TVD СВОЙСТВАМИ (HLL-МЕТОД)

Для численного решения консервативной системы уравнений используется следующая явная схема второго порядка точности, приведенная в [2], которую для уравнений мелкой воды можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\tau}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{q}_i^n + 0.5\Delta x \mathbf{Q}_i^n) - \mathbf{F}(\mathbf{q}_i^n - 0.5\Delta x \mathbf{Q}_i^n)] + \tau \mathbf{G}_i^{n+1/2}, \quad \mathbf{G}_i^{n+1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ gH_i^{n+1/2} \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{\Delta x} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{q}}_i^{n+1} + \mathbf{q}_i^n), \quad \mathbf{q}_i^{n+1} = \mathbf{q}_i^n - \frac{\tau}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \tau \mathbf{G}_i^{n+1/2}, \quad \mathbf{Q}_i^n = \min \text{mod} \left(\frac{\mathbf{q}_{i+1}^n - \mathbf{q}_i^n}{\Delta x}, \frac{\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_{i-1}^n}{\Delta x} \right).$$

Потоки $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$ определяются на гранях ячеек из приближенного решения задачи Римана с помощью метода Хартена-Лакса-ван Лира (HLL). Достоинством метода являются второй порядок точности, простота программирования и нетребовательность к вычислительным ресурсам. К недостаткам метода следует отнести необходимость выбора специального выражения для аппроксимации правой части в (6), если необходимо добиться выполнения условия «спокойной воды» в случае произвольной конфигурации дна.

МЕТОД SPH

Для уравнений мелкой воды в этом методе под «частицей» понимается столбик воды высотой H , отсчитываемой от дна, шириной w . Каждая i -я частица имеет массу $m_i = H_i w_i$ и скорость u_i . Система уравнений, описывающая движение i -й частицы, взаимодействующей с окружающими ее соседними частицами и с дном, в рамках SPH подхода [8] записывается в виде

$$\frac{dw_i}{dt} = w_i \sum_{j \in P} w_j (u_j - u_i) \Delta_i W_{ij}$$

$$\frac{dH_i u_i w_i}{dt} = -w_i \sum_{j \in P} w_j \left[\left(\frac{gH_i^2}{2} + \frac{gH_j^2}{2} - \Pi_{ij} \right) - gH_i (h_j - h_i) \right] \Delta_i W_{ij}, \quad \frac{dH_i w_i}{dt} = 0, \quad \frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad (7)$$

где суммирование проводится по всему ансамблю соседних частиц P , а $\Delta_i W_{ij} = \Delta_i W(x_i - x_j; L)$ – есть производная по пространственной переменной от ядра сглаживающей функции для i -й частицы; L – длина сглаживания; Π_{ij} – необходимая для устойчивости счета искусственная вязкость.

В качестве сглаживающей функции обычно используется кубический сплайн Монагана [9]. Длину сглаживания L для одномерной модели мелкой воды можно задавать постоянной. Достоинством метода являются второй порядок точности, робастность, отсутствие проблемы расчета линии уреза воды. Недостатки метода – приближенное выполнение условия «спокойной воды» в случае произвольной конфигурации дна, большие потребности в вычислительных ресурсах, необходимость настройки ряда ключевых параметров (длина сглаживания, искусственная вязкость) на класс решаемых задач.

МЕТОД TVD+SPH

В основу алгоритма, который далее будет называться TVD+SPH, положен метод, предложенный в работе [4] и представляющий собой оригинальную комбинацию метода SPH и конечно-разностной схемы, обладающей TVD свойством. В узлах разностной сетки, являющихся центрами «эйлеровых» ячеек, определяются все искомые функции H_i^n и $(Hu)_i^n$, задаются также подвижные «лагранжевы жидкие» частицы, имеющие объемы $V_i^n = H_i^n \Delta x$, импульсы $P_i^n = (Hu)_i^n \Delta x$ и положения в пространстве x_i^n . Аналогично методу крупных частиц, этот алгоритм использует расщепление по физическим процессам.

Первый этап состоит в определении характеристик частиц V_i^{n+1} , P_i^{n+1} и их положений x_i^{n+1} с использованием стандартного SPH подхода, когда движение каждой i -й частицы происходит только под действием гидродинамических сил, причем взаимодействующими считаются только две соседние частицы, а длина сглаживания равна Δx :

$$\frac{dH_i}{dt} = 0; \quad \frac{d(Hu)_i}{dt} = -gH_i \frac{d\eta}{dx_i}; \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{(Hu)_i}{H_i}; \quad \eta_i = H_i - h_i.$$

На втором этапе вычисляются потоки массы и импульса через границы ячеек на промежуточном временном слое $n + 1/2$ путем решения задачи Римана в сочетании с TVD-подходом. Здесь в системе уравнений (1) гидродинамических сил

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 \end{pmatrix}$$

и применяется стандартная процедура конечно-разностной аппроксимации, используемая при построении схем Годуновского типа. При приближенном решении задачи Римана консервативные переменные $\mathbf{q}$ слева и справа от границ ячеек вычисляются на полуцелом слое по времени, что обеспечивает второй порядок точности по пространству и времени. Для определения положения точки уреза $x_0(t)$ также применялся метод улавливания точки уреза в узел разностной сетки. После этого рассчитываются новые значения импульсов и объемов частиц, обусловленные потоками этих характеристик через границы ячеек, и затем происходит возврат «лагранжевых» частиц в исходное положение, т.е. в центры «эйлеровых» ячеек.

Достоинством метода являются второй порядок точности, робастность, точное выполнение условия «спокойной воды» и нетребовательность к вычислительным ресурсам. В качестве недостатка следует отметить приближенный, однако более точный, чем в методе крупных частиц, расчет положения линии уреза.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Основные расчеты выполнялись для канала с углом наклона откоса $\alpha = 15^\circ$ и глубиной невозмущенного слоя жидкости $h_0 = 1[\text{м}]$, на правой границе $x = L_x = 45.6[\text{м}]$ ставилось условие непротекания. Начальное состояние свободной поверхности задавалось, как и в работе [10], по формулам (3), при этом полагалось, что $x_w = 25.6[\text{м}]$, $A = 0.2[\text{м}]$. Расчеты проводились в интервале времени $0 \leq t \leq 300$ секунд, в течение которого происходило многократное отражение волны от правой непроницаемой стенки. По нашему мнению, такой тест позволяет наиболее полно выявить сильные и слабые стороны исследуемых численных методов. Цель расчетов состояла в сравнении на простейшей задаче различных подходов к моделированию наката волны на берег, в анализе на конкретном примере их основных характеристик и выборе алгоритма, наиболее перспективного для использования в решении задач о трансформации волн в реальных акваториях. В дальнейшем будут обсуждаться результаты, полученные каждым из рассмотренных методов при условии достижения сходимости на измельчающихся по пространству сетках. Результаты исследования сходимости метода «TVD+SPH» на задаче о накате на откос одиночной волны возвышения, представленные на рисунке 1, показывают, что с достаточной степенью доверия можно относиться к результатам, полученным на сетке, содержащей 2000 узлов.

На рисунке 2 представлена динамика заплеска одиночной волны, рассчитанная различными методами. Можно сказать, что период первого заплеска всеми алгоритмами воспроизводится удовлетворительно, в то время как на воспроизведении высоты наката сказываются диссипативные свойства вычислительных схем. При воспроизведении стадии отката по-прежнему близки (практически идентичны) результаты методов Годунова и TVD+SPH, однако они отличаются от гораздо более сложной картины, представляемой решением, полученным с использованием аналитического граничного условия. Анализ полученных результатов позволяет отдать предпочтение именно методу TVD+SPH, продемонстрировавшему на модельных задачах наилучшие результаты как по точности, так и по своей экономичности.

В докладе приводятся также результаты сравнительного анализа характеристик наката волн в зависимости от их формы и от угла склона.

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 14-17-00219.

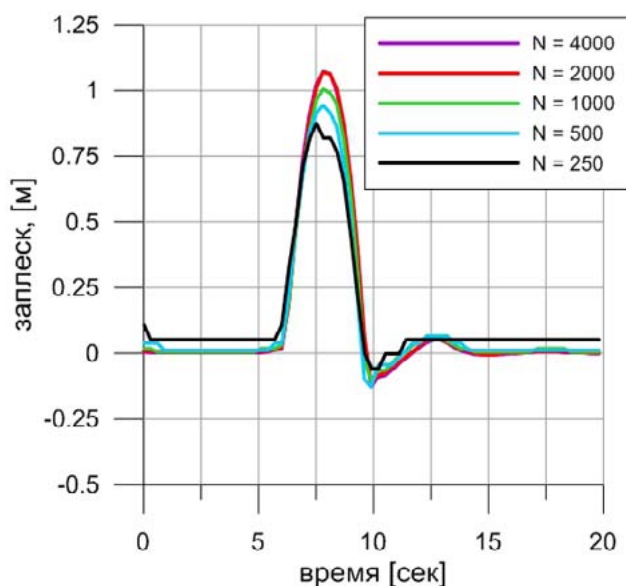


Рис. 1. Сходимость метода TVD+SPH на сетках с различной разрешающей способностью.

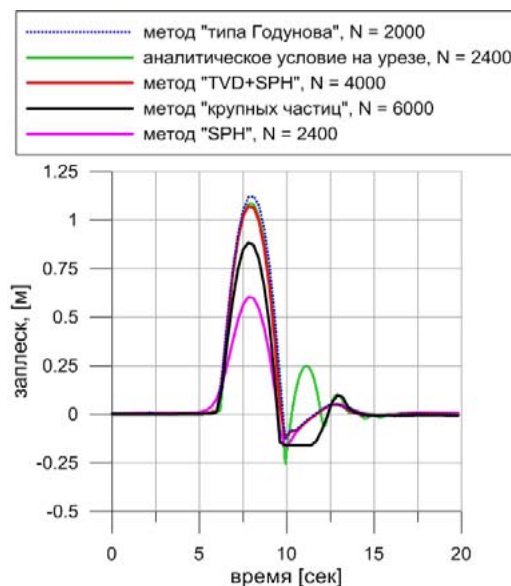


Рис. 2. Сопоставление различных методов моделирования динамики точки уреза при накате уединенной волны на плоский откос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейзель С.А., Рычков А.Д., Чубаров Л.Б. Сравнительный анализ некоторых алгоритмов моделирования наката волн цунами на берег // Задачи со своб. границами: теория, эксперимент и приложения: тез. докл. V Всерос. конф. Бийск: Алт. гос. техн. ун-т, 2014. С. 16.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
3. Родин А.А., Пелиновский Е.Н. Динамика длинных волн в прибрежной зоне моря с учетом эффектов обрушения. Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2014. 93 с.
4. Храпов С.С., Хоперсков А.В., Кузьмин Н.М., Писарев А.В., Кобелев И.А. Численная схема для моделирования динамики поверхностных вод на основе комбинированного SPH-TVD подхода // Вычисл. методы и программирование. 2011. Т.12. С. 282-297.
5. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Рычков А.Д., Чубаров Л.Б. Численное моделирование наката волн цунами на побережье с использованием метода крупных частиц // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 1. С. 99-112.
6. Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on a movable shoreline // Russ. J.-Numer. Anal. Math. Modelling. 2011. Vol. 26, No 4. P. 353-377.
7. Kofanov A.V., Liseikin V.D., Rychkov A.D., Application of coordinate transformations in numerical simulation of tsunami runup by the large particle method // Comput. Math. and Math. Phys. 2015. Vol. 55, No 1. P. 109-116.
8. Leffe M. De, Touze D. Le, Alessandrini B. SPH modeling of shallow-water coastal flows // Journal of Hydraulic Research. 2010. Vol. 48. Extra Issue. P. 118-125.
9. Monaghan J.J. Simulating free surface flows with SPH // J. Comput. Phys. 1994. Vol. 110, No 2. P. 399-406.
10. Synolakis C.E. The runup of solitary waves // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 185. P. 523-545.